Université Ibn Tofaïl
جامعة ابن طفيل
Faculté des Sciences

Electricité

Cours
Exercices et problèmes corrigés

Pr. : M. CHAFIK EL IDRISSI

TABLE DES MATIERES

Rappels Mathématiques

1. Les vecteurs

Un vecteur est un objet mathématique qui possède une intensité et une direction.

On désignera un vecteur au moyen d'un symbole surmonté d'une flèche $(\vec{V})$ et son intensité par le symbole sans la flèche V.

La composante d'un vecteur sur un axe donné est la longueur de la projection du vecteur sur l'axe. Soit trois axes orthogonaux X, Y et Z. Un vecteur (tridimensionnel) est complètement déterminé par ses composantes x, y, z sur les trois axes. On écrit $\vec{V} = (x, y, z)$. Cela dit, il est important de remarquer que le vecteur est indépendant des axes choisis (c'est-à-dire du référentiel), tandis que les composantes changent si l'on effectue une rotation des axes, par exemple.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la grandeur est égale à 1. On le désigne par une lettre minuscule ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, $\vec{u}$, etc.). Pour tout vecteur $\vec{V}$ non nul, $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V}$ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{V}$. Les trois vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont parallèles aux axes X, Y, Z, respectivement et manifestement,

$$\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \tag{1.1}$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un nombre, noté $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ et défini comme

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.2}$$

On peut montrer que $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = V_1\,V_2\cos\alpha$. α est l'angle entre $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$. Le produit $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ est un scalaire, en ce sens que sa valeur ne change pas si l'on effectue une rotation des axes x, y et z.
On a

$$\vec{V}\cdot\vec{V} = x^2 + y^2 + z^2 = V^2 \tag{1.3}$$

- Le produit vectoriel de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur, noté $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ et défini comme

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

On peut montrer que $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, dont l'intensité est égale à $V_1.V_2\,|\sin\alpha|$ et dont le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite.
Il n'est pas difficile de montrer que :

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = -\,\vec{V_2}\wedge\vec{V_1} \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} \cdot \overrightarrow{V_1} \tag{1.6}$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_2} \cdot (\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}) = \overrightarrow{V_3} \cdot (\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}) \tag{1.7}$$

$$\overrightarrow{V_1} \cdot (\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}) = (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_3}).\overrightarrow{V_2} - (\overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{V_2}).\overrightarrow{V_3} \tag{1.8}$$

- La dérivée d'un vecteur par rapport à une variable s'effectue composante par composante. La dérivée d'un produit scalaire ou d'un produit vectoriel suit les lois de la dérivée d'un produit ordinaire.

2. Les systèmes de coordonnées

Rappel : L'intégrale d'une fonction $f(x)$ entre deux bornes a et b est égale à l'aire sous la courbe associée. Pour obtenir une valeur approximative de l'aire, on peut faire la construction illustrée à la figure 1.1. On divise l'intervalle (a,b) en n sous intervalles égaux de longueur Δx, et on évalue l'aire de chacun des rectangles indiqués.

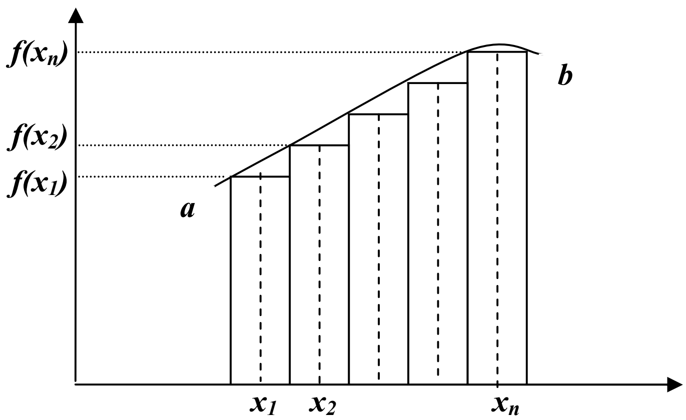


Fig. 1.1: Approximation de l'aire sous une courbe.

On ainsi :

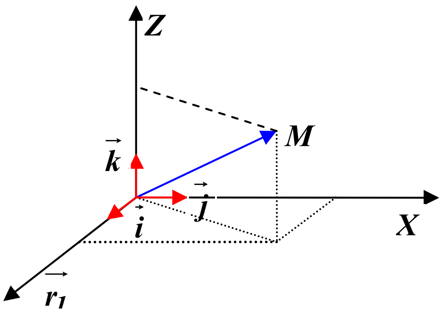
$$\text{Aire sous la courbe} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{1.9}$$

Et donc

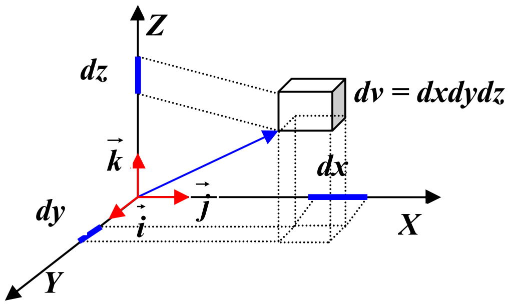
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{1.10}$$

Une fonction d'une variable peut être intégrée sur un intervalle. On effectue donc les calculs dans l'espace à une dimension. De même, une fonction de deux variables peut être intégrée sur une surface (on utilise dans ce cas l'intégrale double $\iint$), les calculs sont réalisés dans l'espace à deux dimensions. En fin, une fonction de trois variables peut être intégrée sur un volume (on utilise l'intégrale triple $\iiint$) et on calcul donc dans l'espace à trois dimensions.

a- <u>Coordonnées cartésiennes</u>

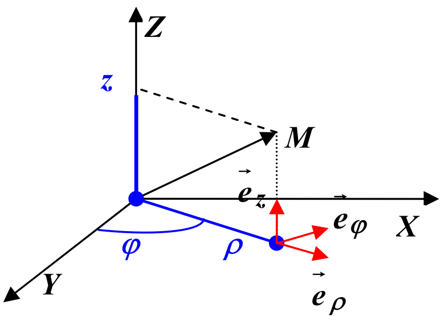


$M = M\,(x,y,z)$

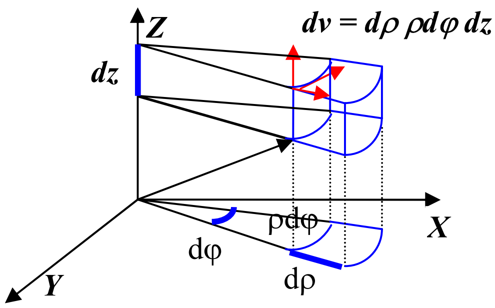


Elément de volume

b- <u>Coordonnées cylindriques.</u>



$M = M\,(\rho,\varphi,z)$



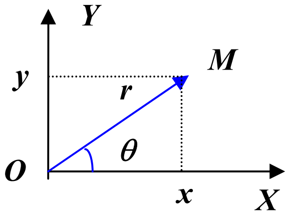
Elément de volume

En faisant varier ρ de 0 à R, φ de 0 à 2π et z de 0 à une valeur h, le point M décrira un cylindre d'axe OZ, de rayon R et de hauteur h. On écrit :

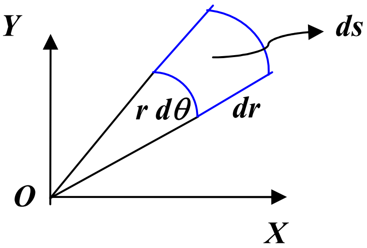
$v = \iiint_v dv = \iiint_v d\rho\rho d\varphi dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} 2\pi h$. C'est-à-dire que $v = \pi R^2 h$ qui est bien le volume du cylindre. On peut obtenir la surface (donc deux dimensions) du même cylindre en fixant dés le début $\rho = R$: $s = \iint_s ds = \int_0^{2\pi} R d\varphi \int_0^h dz = 2\pi R h$.

<u>Cas particulier</u> : <u>coordonnées polaires.</u>

Quand $z = 0$, le système est réduit à deux dimensions φ et ρ, que l'on note par habitude θ et **r**. Dans ce cas on peut représenter OM ainsi que l'élément de surface ds dans le référentiel OXY.

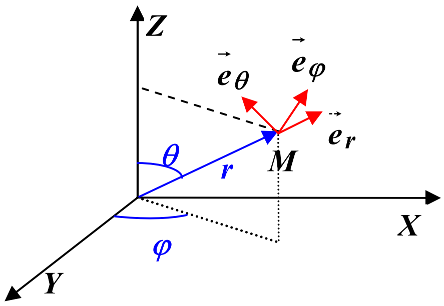


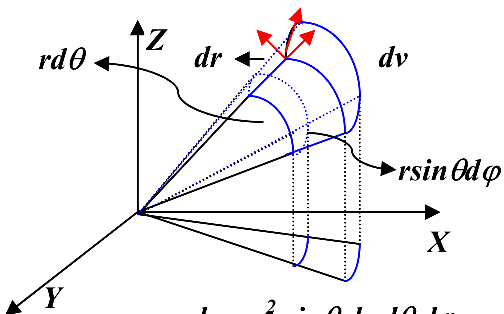
$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$
$x^2 + y^2 = r^2$



$ds = r\,dr\,d\theta$

c- Coordonnées sphériques.





$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$M = M\,(r,\theta,\varphi)$ Elément de volume

En faisant varier r de 0 à R, θ de 0 à π et φ de 0 à 2π, le point M décrira une sphère de rayon R et de centre O. On écrit :

$v = \iiint_v dv = \iiint_v r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \dfrac{R^3}{3}.2.2.\pi$. C'est-à-dire que

$v = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ qui est bien le volume de la sphère.

On peut obtenir la surface (donc deux dimensions) de la même sphère en fixant dés le début $r = R$: $s = \iint_s ds = R^2 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$.

3. Analyse vectorielle

Un objet mathématique qui dépend des coordonnées spatiales **x**, **y**, et **z** est appelé un champ. Un champ peut aussi dépendre du temps. Un champ peut être scalaire ***(f(x, y, z)*** ou ***f(x, y, z, t))*** ou vectoriel. Un champ vectoriel est un vecteur qui dépend de x, y, z (et, peut-être aussi, de t). Chaque composante du champ peut être fonction des trois variables spatiales x, y et z.

$$\vec{V}(\vec{r}) = (V_x(x, y, z),\ V_y(x, y, z),\ V_z(x, y, z)) \tag{1.11}$$

On écrit aussi $\vec{V}(\vec{r})$ ou $\vec{V}(\vec{r}, t)$.

Un vecteur qui ne dépend pas de $\vec{r}$ est un champ dit uniforme. Un champ indépendant du temps est dit constant.

Exemples. Le champ électrique, le champ magnétique et la vitesse d'un fluide sont des champs vectoriels, tandis que la température, la pression, et la densité de l'atmosphère sont des champs scalaires.

3.1. LES OPERATEURS : Gradient, divergence et rotationnel.

a- L'opérateur gradient

Soit $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ un champ scalaire. On peut, en général, calculer les dérivées partielles de f par rapport aux variables x, y et z (de même que les dérivées secondes, etc.). Soit $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r} + \vec{dr} = (x+dx, y+dy, z+dz)$ deux points séparés par une distance infiniment petite. La différence entre $f(\vec{r} + d\vec{r})$ et $f(\vec{r})$ est, au premier ordre, donnée par les premiers termes de la série de Taylor :

$$f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1.12)$$

Définissons un champ vectoriel noté $\overrightarrow{grad}\,f$ dont l'expression est :

$$\overrightarrow{grad}\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Le second membre de l'équation 1.10 serait le produit : $\overrightarrow{gradf}.d\vec{r}$. Alors on peut écrire :

$$\overrightarrow{gradf}.d\vec{r} = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (1.13)$$

Le champ $\overrightarrow{gradf}$ est appelé gradient de f. L'opérateur gradient est un champ <u>vectoriel</u> agissant sur une fonction <u>scalaire</u>.

$$\overrightarrow{gradf} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (1.14)$$

Pour un $\vec{dr}$ donné, il est clair que $f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r})$ sera maximum si $d\vec{r}$ est parallèle à $\overrightarrow{gradf}$. Ainsi, le gradient donne la direction de variation maximum d'une fonction. Par ailleurs, une fonction ne varie pas dans une direction orthogonale au gradient.

b- L'opérateur divergence.

Soit un champ vectoriel $\vec{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$. La divergence de $\vec{V}$ est le champ scalaire noté $div\vec{V}$ et défini comme $div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$.

La signification physique de la divergence sera examinée plus tard.

c- L'opérateur rotationnel.

Soit un champ vectoriel $\vec{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$. Le rotationnel de $\vec{V}$ est le champ vectoriel $\overrightarrow{rot\vec{V}}$ noté et défini comme :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z})\,\vec{i} - (\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z})\,\vec{j} + (\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y})\,\vec{k}$$

La signification physique du rotationnel sera examinée plus tard. Il est aisé de montrer que, pour tout champ scalaire $f(\vec{r})$, $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{grad}\,f(\vec{r})) = \vec{0}$, c'est à dire que le rotationnel d'un gradient s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si $\vec{V}$ est un champ vectoriel tel que $\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$, alors il existe un champ scalaire f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{gradf}$. On dit que $\vec{V}$ est un gradient. Il est aisé de montrer que, pour tout champ vectoriel $div(\overrightarrow{rot}\vec{V}) = 0$, c'est à dire que la divergence d'un rotationnel s'annule toujours. Inversement, on peut montrer que si $\vec{V}$ est un champ vectoriel tel que $div\vec{V} = \vec{0}$, alors il existe un champ vectoriel $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \overrightarrow{rot}\vec{V}$. On dit que $\vec{W}$ est un rotationnel.

d- L'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$.

C'est un opérateur vectoriel qui a pour composante : $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ tel que :

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)$$
$$\vec{\nabla}\vec{V}(x,y,z) = div\vec{V}(x,y,z)$$
$$\vec{\nabla}\Lambda\vec{V}(x,y,z) = \overrightarrow{grad}\vec{V}(x,y,z)$$

e- L'opérateur Laplacien Δ

C'est un opérateur scalaire obtenu par deux applications successives de $\vec{\nabla}$ sur un champ de scalaires : $\Delta f(x,y,z) = \vec{\nabla}\,(\vec{\nabla} f(x,y,z)) = div\,(\overrightarrow{grad}\,f(x,y,z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

4. Théorèmes fondamentaux.

4.1 Circulation d'un vecteur.

Soit, dans l'espace, un champ vectoriel $\vec{E}(\vec{r})$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$). Sur tous les points de la courbe ***ab*** (figure1.2), $\vec{E}(\vec{r})$ peut avoir une direction différente. En particulier entre deux points voisin ***M*** et ***M'***. On appelle circulation de $\vec{E}(\vec{r})$ le long de la courbe ***ab***, la quantité :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} \qquad (1.15)$$

$\vec{E}(\vec{r}).\vec{dl}$ est la circulation élémentaire de $\vec{E}(\vec{r})$ le long de $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$

$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha$

- *Si* $\vec{E} \perp \vec{dl}$, $\cos\alpha = 0$ *et donc* $C(\vec{E}/ab) = 0$

- *Si* $\vec{E} // \vec{dl}$, $\cos\alpha = 1$ *et donc*

$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl$ si en plus E est uniforme (constant en tout point M de ab) alors :

$C(\vec{E}/ab) = E\int_{ab} dl = E.ab$

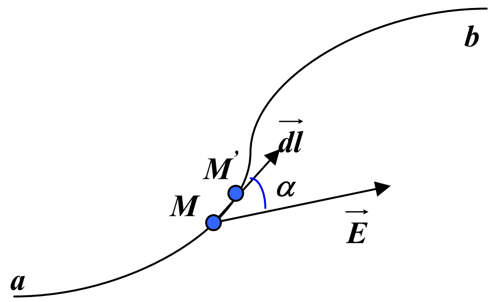


Figure 1.2

4.2. Flux d'un vecteur à travers une surface.

A dS on associe $\vec{dS}$ dont les caractéristiques sont : - module : aire de dS
- direction : normale en M à dS
- sens : au choix

$\vec{dS} = dS.\vec{n}$

Par définition, on appelle flux de $\vec{E}$ à travers la surface S, la quantité : $\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E}\vec{dS}$

- Si $\vec{E} \perp \vec{dS}$, $\cos\alpha = 0$ et $\Phi(\vec{E}/S) = 0$. Le flux est minimal.

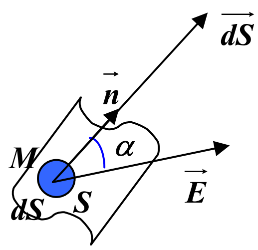


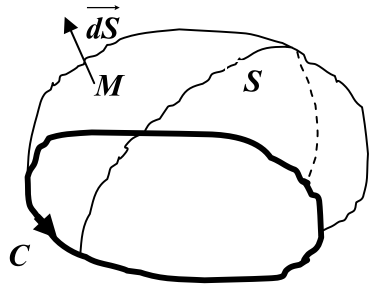
Figure 1.3

- Si $\vec{E} // \vec{dS}$, $\cos\alpha = 1$ et $\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S EdS$. Si en plus E est uniforme (constant en tout point M de S) alors $\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = E.S$. Le flux est maximal. On peut imaginer que le flux d'un champ vectoriel à travers une surface serait la quantité de vecteurs qui traverse cette même surface.

4.3. Théorème de Stokes.

Soit : - Un Champ de vecteurs $\vec{E}$.
- Une courbe fermée C
- Une surface S s'appuyant sur C

Important : Nous avons orienté la courbe C (flèche), en un point M de S, le vecteur surface $\vec{dS}$ obéira à la règle du tir bouchon ou à la règle des trois doigts de la main droite.



Enoncé : La circulation de E à travers (C) est égale au flux à travers S de son rotationnel.

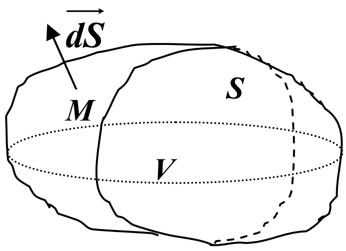
$$\oint_C \vec{E}\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}\vec{dS} \qquad (1.16)$$

Le symbole $\oint_C$ signifie que la courbe d'intégration (***C***) est fermée.

4.4. Théorème de Green Ostrogradski.

Soit : - Un Champ de vecteurs $\vec{E}$.
- Une courbe fermée ***C***
- Une surface fermée ***S*** délimitant un volume ***V***

Important : Quand la surface est fermée, on oriente $\overrightarrow{dS}$ de l'intérieur vers l'extérieur.



Enoncé : Le flux de $\vec{E}$ à travers (***S***) est égale à l'intégrale triple de sa divergence.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{E}.dV \qquad (1.17)$$

Le symbole $\oiint_S$: signifie que la surface d'intégration (***S***) est fermée.

Exercices sur les rappelles Mathématiques

EXE 1

Soit trois points ***A (2,4,4)*** et ***B (3,6,5)*** ; ***C (6,6,6)***.

a- Représenter dans le système de coordonnées cartésien les points ***A***, ***B*** et ***C***.

b- Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et les écrire dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

c- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

d- Calculer les modules de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

e- Calculer l'angle que fait $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$

EXE 2

Un point ***M*** étant repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Calculer :

a- Le gradient des fonctions : ***r***, ***1/r*** et ***ln r***.

b- La divergence des vecteurs : $\vec{r}$ et $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

c- le rotationnel des vecteurs : $\vec{r}$, $\dfrac{\vec{r}}{r^2}$ et $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

d- Le Lapacien Δr.

EXE 3

Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ dont les composantes au point ***M*** sont :

$V_x(x, y, z)$, $V_y(x, y, z)$, $V_z(x, y, z)$.

Calculer sa divergence et son rotationnel si.

a- $V_x = 2x - y$ $\quad V_y = -x + 2y$ $\quad V_z = -4z$

b- $V_x = 2y + 3z$ $\quad V_y = -2x$ $\quad V_z = 3x$

Le cas échéant donner l'expression dont il est le gradient.

Electrostatique

I- Force et Champ électrostatiques

I.1 Introduction.

L'électrostatique, est l'étude des interactions entre charges électriques maintenues fixes dans un repère donné (immobiles).

Pour évaluer les interactions entre charges, il est très commode d'introduire le concept de champ. Dans ce chapitre, nous allons introduire et étudier le champ électrostatique (on dit souvent le champ électrique) et les méthodes de le calculer quand c'est possible.

Quantification de la charge électrique.

C'est un fait expérimental que toutes les charges électriques isolables sont des multiples entiers d'une charge fondamentale, égale à la charge du proton. Il semble que tous les protons ont rigoureusement la même charge électrique, notée $q_p = 1{,}602.10^{-19}\ C$ (**C** : coulomb). Tous les électrons ont une charge égale à $-q_p$.

L'existence de charges positives et négatives correspond au fait que la force entre deux charges immobiles (que nous allons bientôt investiguer) peut être attractive ou répulsive. La force gravitationnelle, par contre, est toujours attractive, d'où le fait que toutes les masses sont positives.

Quoi qu'il en soit, les lois de l'électrostatique que nous allons développer sont indépendantes de la quantification de la charge. Les forces seront de nature électrostatique. On dit aussi force coulombienne.

Afin de faciliter la compréhension de certaines parties, dans la suite du cours, nous supposerons toujours que les charges sont positives (sauf quand c'est indiqué).

I.2 La loi de Coulomb.

Soit deux charges ponctuelles immobiles q_1 et q_2. La force électrostatique existante entre les deux charges est attractive si les charges ont des signes opposés, et est répulsive si elles sont de même signe.

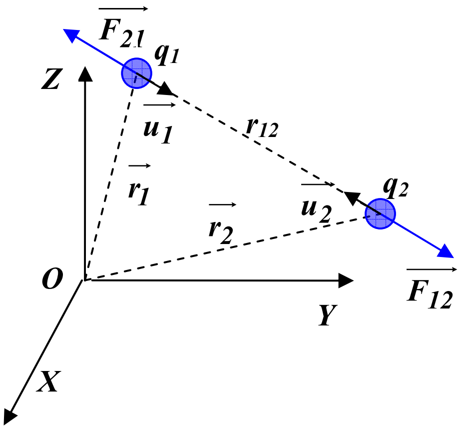
La force est proportionnelle au produit des charges, et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Explicitement, si $\vec{F}_{12}$ désigne la force exercée par q_1 sur q_2 et $\vec{F}_{21}$ la force exercée par q_2 sur q_1, alors :

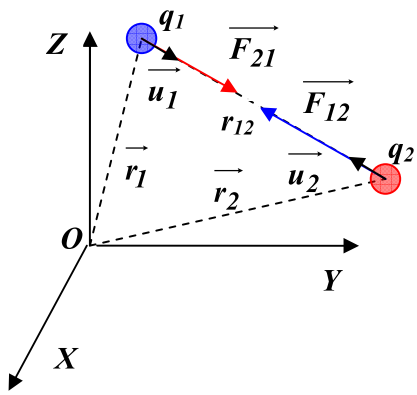
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.1)$$

La constante $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ C^2\ s^2\ kg^{-1}\ m^{-3}$ est appelée permittivité du vide. On peut se rappeler qu'en unités internationales, $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} = k = 9 \times 10^9$.

On peut trouver les valeurs précises des constantes physiques sur la page Web du National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html).



q_1 et q_2 de même signe



q_1 et q_2 de signe opposé

L'expression (2.1) peut aussi être écrite sous la forme :

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_{12}\,\overrightarrow{u_1}}{r_{12}^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_2} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.2)$$

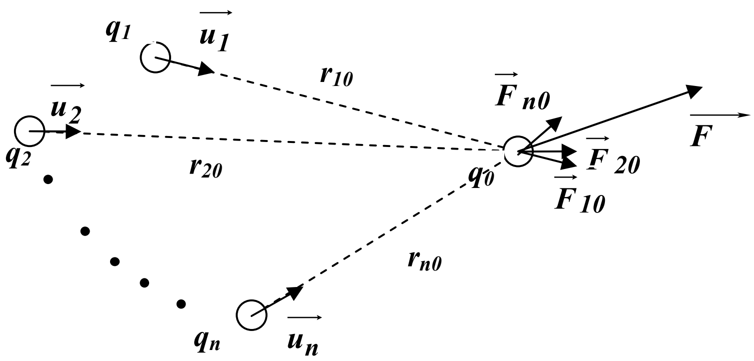
Remarques : - Dans l'expression (2.2) il faut tenir compte du signe de la charge.

- Le sens de la force électrostatique dépend du signe de la charge, alors que le sens des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ est toujours le même.

- La force électrostatique est très grande si on la compare à la force de gravitation. A titre d'exemple : Entre deux électrons qui se repoussent, le rapport entre la force électrostatique et la force de gravitation est de l'ordre de $F_{el}/F_g = 4\ 10^{42}$. La force de gravitation reste donc suffisamment négligeable devant F_{el}.

Théorème de superposition.

Soit q_0 une charge électrique située en un point M_0 de l'espace et soit $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des charges situées aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$. On suppose, bien sûr, que les charges sont ponctuelles et immobiles. C'est un fait expérimental que la force totale exercée par les n charges sur q_0 est la résultante vectorielle des forces coulombiennes exercées par chacune des n charges. Ceci s'appelle le principe de superposition. Explicitement, si $\vec{F}$ désigne la force électrostatique totale exercée sur q, alors :



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{i0}^2}\overrightarrow{u_i} \qquad (2.3)$$

Où r_{i0} ($i = 1, 2, \ldots, n$) est la distance qui sépare la charge q_i de la charge q_o.

I.3 Champ électrique dans le vide.

Dans l'expression (2.3), on peut remarquer que la charge q_0 ne dépend pas de i. On peut la faire sortir à l'extérieur de Σ.

$$\vec{F} = q_0 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i} \right] \tag{2.4}$$

La quantité entre crochets est indépendante de la charge q_0. Elle ne dépend que des autres charges et de la distance M_0M_i. Cette quantité est appelée champ électrique :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i} \tag{2.5}$$

Il est crée au point M_0 par l'ensemble des charges immobiles q_1, q_2, …, q_n. Il est tel que, si l'on introduit une charge additionnelle q_0 au point M_0, la force électrostatique exercée sur q_0 est donnée par :

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \tag{2.6}$$

Physiquement, les forces sont des quantités mesurables. A première vue, il peut sembler que le champ électrique n'a qu'une signification mathématique, en l'occurrence, un vecteur qui permet de calculer aisément les forces. Mais le champ électrique a deux autres caractéristiques importantes. D'une part, il sert à éliminer le concept d'action à distance. En effet, il peut être désagréable de penser que deux charges puissent s'influencer sans qu'il y ait rien entre elles. Dans ce contexte, le champ électrique est l'entité qui, de proche en proche, transmet l'interaction d'une charge à l'autre. La présence d'une charge modifie les propriétés de l'espace environnant, et l'espace ainsi modifié produit la force sur l'autre charge.

Le champ électrique à, d'autre part, véritablement une signification physique. Ceci est relié, entre autres, au fait qu'il possède de l'énergie et de l'impulsion, comme nous le verrons éventuellement. En fin, comme on a pu le constater, le champ électrique est inversement proportionnel à r^2 ; on dit qu'il est newtonien.

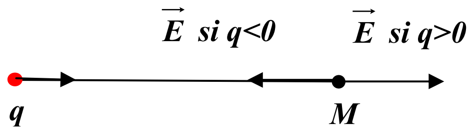
Important : *Le champ électrique crée par une charge existe en tout point* ***M*** *de l'espace alors que la force électrique n'existe que s'il y a aux moins deux charges.*

Cas particulier

1- champ crée par une seule charge ponctuelle

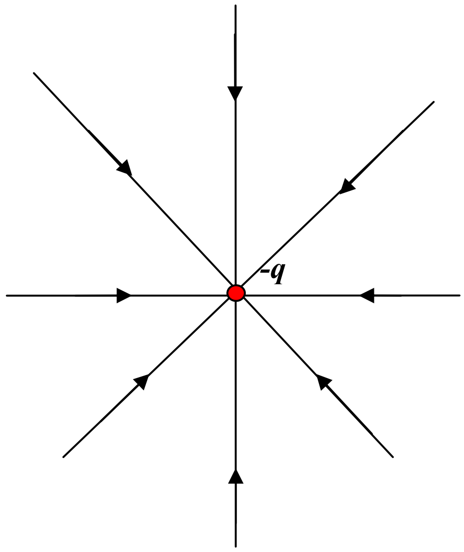
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$ Quand $q > 0$ $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de même sens et quand $q < 0$ $\vec{E}$ et $\vec{u}$ sont de signe contraire.

On dit que le champ électrique fuit les charges positives et se dirige vers les charges négatives.

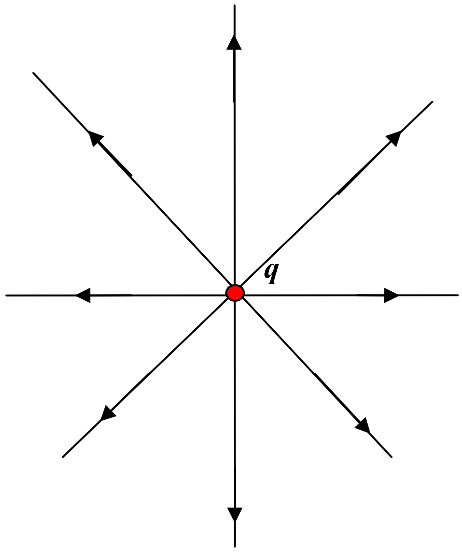


On appelle lignes de champ (on dit aussi ligne de force), l'ensemble des courbes qui sont constamment parallèles au champ. En d'autres termes c'est ''la trajectoire de $\vec{E}$''.

Dans le cas d'une seule charge les lignes de champ sont des droites qui se coupent au point où est placée la charge.



Cas d'une charge négative



Cas d'une charge positive

Le tracé des lignes de champ permet d'établir l'allure générale du champ électrique dans une région donnée de l'espace. La ligne de champ représente l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point. Pour tracer convenablement les lignes de champ, certaines règles s'appliquent :

1. Les lignes de champ sont continues entre les charges positives et négatives. Les lignes de champ sont produites par les charges positives et absorbées par les charges négatives.

2. Le nombre de lignes de champ produites ou absorbées par une charge est proportionnel à la grandeur de la charge (une charge ***+2q*** produit deux fois plus de lignes qu'en absorbe une charge ***-q***).

3. Les lignes de champ doivent respecter la symétrie de la distribution des charges.

4. Les lignes de champ ne doivent pas se croiser.

5. En s'éloignant de la distribution de charges, les lignes de champ semblent provenir d'une charge ponctuelle de valeur égale à la charge nette de la distribution.

I.3.1.Champ électrique crée par une distribution continue de charges.

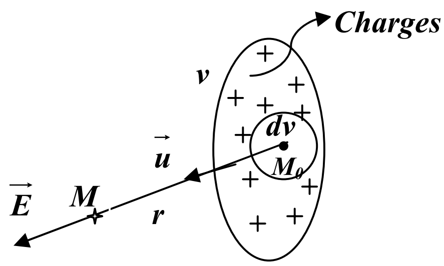
D'un point de vue microscopique, la charge électrique est portée par des particules élémentaires extrêmement petites. D'un point de vue macroscopique, cependant, on peut souvent considérer que la charge électrique est distribuée de façon continue. Ceci suppose que l'on se situe à des échelles beaucoup plus grandes que les dimensions des particules.

Donc, dans un espace donné une **distribution continue** de charge est un ensemble de charges ponctuelles supposées collées l'une à l'autre et le moindre espace vide entre deux charges voisines est inexistant.

Une distribution de charge continue peut être **volumique** (que l'on note souvent ρ), **surfacique** (σ) (on dit aussi superficielle) ou **linéique** (λ). Une distribution de charge peut être constante ou variable.

a- Distribution volumique.

Supposons qu'un volume quelconque $\boldsymbol{v}$ contient une distribution continue de charges. Soit $\boldsymbol{dv}$ un élément de volume autour d'un point $\boldsymbol{M_0}$. Supposons que, $\boldsymbol{dv}$ soit petit par rapport aux distances macroscopiques, mais grand par rapport aux dimensions des particules. Soit $\boldsymbol{dq}$ la charge électrique élémentaire contenue dans $\boldsymbol{dv}$.



La densité volumique de charge au point $\boldsymbol{M}$, notée ρ, est définie comme :

ρ contient la charge $\boldsymbol{dq}$,

$$\rho = \frac{dq}{dv} \tag{2.7}$$

Le champ crée par $\boldsymbol{dq}$ au point $\boldsymbol{M}$ est :

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} \tag{2.8}$$

Si maintenant on divise $\boldsymbol{v}$ en un ensemble de volumes très petits v_i ($i = 1$ --- > n) contenant chacun une charge élémentaire dq_i, le champ total crée au point $\boldsymbol{M}$ par toute ces charges (donc par une distribution discontinue de charge) serait :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dv_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} \tag{2.9}$$

Où r_i est la distance entre la charge q_i (située au point M_{0i}) est le point $\boldsymbol{M}$ et $\overrightarrow{u_i}$ est le vecteur unitaire de la direction $M_{0i}M$.

Et si en plus on fait tendre ***n*** vers l'infini, la distribution discrète de charges va devenir une distribution continue et le champ serait :

$$\vec{E} = \iiint_v \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dv}{r^2}\vec{u} \qquad (2.10)$$

Notons qu'une intégrale vectorielle s'évalue composante par composante.

b- Distribution surfacique

Pour une distribution surfacique, le même résonnement nous conduit à :

$$\vec{E} = \iint_s \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u} \qquad (2.11)$$

c- Distribution linéique

Et en fin quand la distribution est linéique nous aurons :

$$\vec{E} = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dl}{r^2}\vec{u} \qquad (2.12)$$

I.4 Théorème de Gauss.

I.4.1 Angle solide.

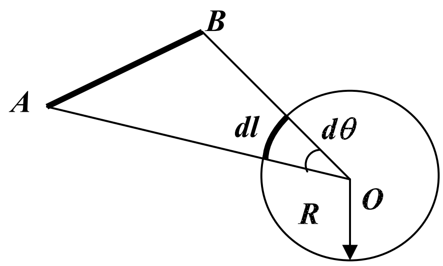
Essayons de comprendre la signification d'un angle dans le plan :

Selon le schéma ci-contre, $d\theta$ est l'angle sous lequel du point ***O*** on observe le segment [***AB***]. ***dl*** est l'arc découpé sur le cercle de rayon ***R*** par les segments [***OA***] et [***OB***].

$dl = R\,d\theta$.

Si $R = 1$ alors $dl = d\theta$ (θ en radian).

On peut dire qu'un angle en radian est la longueur de l'arc découpé sur le cercle de rayon 1 (une unité : 1 mètre, 1cm,...).



Cercle de rayon R = 1

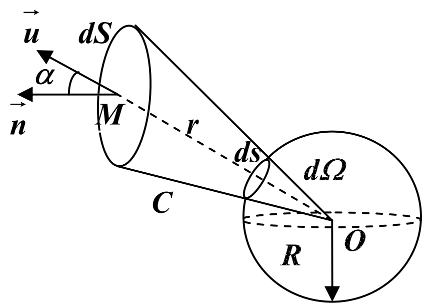
L'angle sous le quel de ***O*** on observe tout le plan est le périmètre du cercle de rayon 1 c'est-à-dire $2\pi R = 2\pi$ radian.

Par analogie, un angle dans l'espace, est la surface (au lieu du périmètre) découpée sur la sphère (au lieu du cercle) de rayon 1. On l'appelle angle solide et on le note Ω. Ω est défini en stéradian (srd).

$d\Omega$ est l'angle solide sous lequel du point $\boldsymbol{O}$ on observe la surface $\boldsymbol{dS}$. $\boldsymbol{ds}$ est la surface découpée sur la sphère de rayon 1 par le cône $\boldsymbol{C}$.

On montre que :

$$\frac{ds}{dS\cos\alpha} = \frac{R^2}{r^2}$$



Sphère de rayon R = 1

Soit :

$$d\Omega = ds = \frac{R^2 dS\cos\alpha}{r^2}$$

Avec $\boldsymbol{R = 1}$:

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{dS\ \vec{n}\,\vec{u}}{r^2} = \frac{\overrightarrow{dS}\,\vec{u}}{r^2} \tag{2.13}$$

L'angle solide sous lequel on observe tout l'espace est la surface de la sphère de rayon 1 : $\Omega = 4\pi R^2 = 4\pi\, srd$.

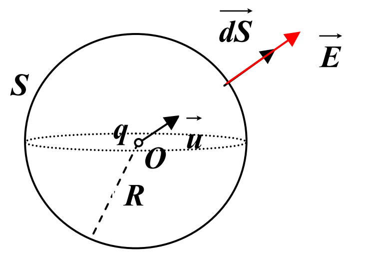
I.4.2 Flux du champ électrique.

a- Cas d'une seule charge

* **<u>Flux de $\vec{E}$ à travers une sphère</u>**.

On cherche le flux du champ électrique à travers une sphère (surface fermée) de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$. En tout point $\boldsymbol{M}$ de la surface de la sphère, nous avons :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$$



Et
$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \tag{2.14}$$

$\vec{u}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires : $\vec{u}.\overrightarrow{dS} = u.dS = dS$

$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}.\overrightarrow{dS}$ est le flux du champ à travers la surface élémentaire $\boldsymbol{dS}$. On dit que c'est un flux élémentaire.

Le flux est :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \int d\Phi(\vec{E}/dS) = \iint_S \vec{E}\ \overrightarrow{dS} = \iint_S E\ \vec{u}\ \overrightarrow{dS} = \iint_S E\ dS$$

Or, quelque soit le point $\boldsymbol{M}$ de la surface de la sphère, la distance $\boldsymbol{OM}$ est toujours égale à $\boldsymbol{R}$. Puisque $\vec{E}$ ne dépend que de $\boldsymbol{R}$, sa valeur sera la même partout sur $\boldsymbol{S}$; d'où :

$$\Phi(\vec{E}\,/\,S) = E\iint_S dS = E\,S = E\;4\pi R^2 \qquad (2.15)$$

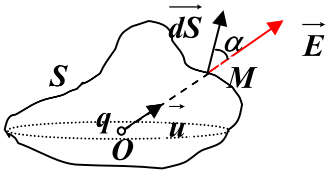
Des relations (2.14) et (2.15) on déduit :

$$\Phi(\vec{E}\,/\,S) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2.16)$$

Le flux du champ électrique à travers une sphère est indépendant de son rayon (donc de la sphère elle-même). Il ne dépend que de la charge qui crée le champ.

*** Flux de $\vec{E}$ à travers une surface quelconque.**

On cherche à calculer le flux du champ électrique à travers une surface quelconque ***S*** (surface fermée). En tout point ***M*** de la surface tel que ***OM = r***, nous avons :



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Et $$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (2.17)$$

Avec $\vec{u}.\vec{dS} = dS.\cos\alpha$

$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}.\vec{dS}$ est le flux élémentaire du champ à travers la surface élémentaire ***dS***.

$$d\Phi(\vec{E}\,/\,dS) = \vec{E}\,\vec{dS} = E\,\vec{u}\,\vec{dS} = E\;dS\;\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS\,\cos\alpha$$

Le flux élémentaire peut être écrit sous la forme :

$$d\Phi(\vec{E}\,/\,dS) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{r^2} \qquad (2.18)$$

$\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$ est l'angle solide sous lequel du point ***O***, on observe ***dS***; soit :

$$d\Phi(\vec{E}\,/\,dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi}$$

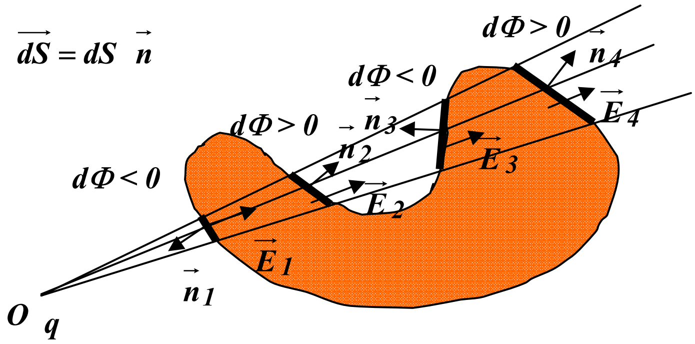
D'où :

$$\Phi(\vec{E}\,/\,S) = \int d\Phi(\vec{E}\,/\,dS) = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (2.19)$$

*Le flux du champ électrique est indépendant de la surface choisie (sphère, surface quelconque, ...etc.). Il ne dépend que de la charge (**q**) et du milieu (ici le vide : ε_0).*

Remarques :

- Quand la charge q est à l'extérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide $d\Omega$ sur S est obligatoirement pair : donc $d\Phi$ total est nul => $\Phi = 0$.

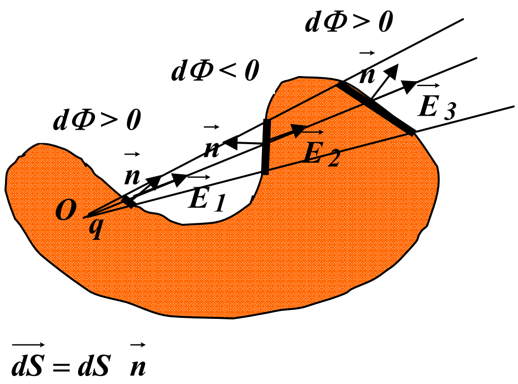


- Quand q est à l'intérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide $d\Omega$ sur S est obligatoirement impair et en plus $d\Phi$ garde la même valeur :

$$d\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_{total}}{4\pi}$$

avec $\Omega_{total} = 4\pi$ donc :

$$\Phi(\vec{E} / dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



En résumé, chaque fois que la charge se trouve dans la surface fermée, le flux est non nul et chaque fois qu'elle est à l'extérieur de la surface fermée, le flux est nul.

I.4.3 Théorème de Gauss.

Dans le cas de plusieurs charges distribuées dans l'espace, le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est la somme algébrique des flux envoyés par chacune des charges (principe de superposition).

$$\Phi(\vec{E} / S) = \oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{intérieures} \qquad (2.20)$$

$q_{intérieures}$ désigne la charge totale contenue dans la surface fermée S. Les charges qui sont à l'extérieur de S envoient un flux nul

Dans le cas d'une distribution continue, le théorème de Gauss prend la forme :

- distribution volumique :

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV \qquad (2.21)$$

V : volume chargé contenu dans la surface fermée S.

- distribution superficielle

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_\Sigma \sigma\, d\Sigma \qquad (2.22)$$

S : surface chargée contenu dans la surface fermée S.

- distribution linéique

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_l \lambda dl \qquad (2.23)$$

l : longueur chargée contenu dans la surface fermée S.

Remarque :

Dans le cas d'une distribution volumique, on peut utiliser le théorème d'Ostrogradski pour convertir l'intégrale double en une intégrale triple :

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \iiint_V div\vec{E}\, dV \qquad \text{Avec} \qquad \oiint_{S\ fermée} \vec{E}\ \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV\ .$$

Il s'ensuit que :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.24)$$

L'expression (2.24) est dite forme locale du théorème de Gauss. On l'appelle équation de Poisson.

S'il y a absence de charge dans le volume V, $\rho = 0$ et donc $div\vec{E} = 0 \iff \oiint_S \vec{E}\vec{dS} = 0$, on dit que le champ électrique est à flux conservatif. C'est-à-dire que le flux total reste nul.

Explication :

Soit S une surface fermée formée par : un tube de force + s_1 + s_2. Le flux de $\vec{E}$ à travers S est :

$$\Phi(\vec{E}/S) = 0 = \Phi(\vec{E}/\text{tube de force}) + \Phi(\vec{E}/s_1) + \Phi(\vec{E}/s_2)$$

$\vec{E}$ tangent aux lignes de champ : $\Phi(\vec{E}/\text{tube de force}) = 0$ donc $\Phi(\vec{E}/s_1) = -\Phi(\vec{E}/s_2)$.

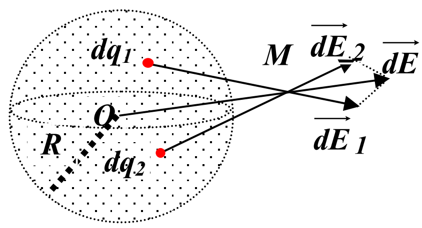
Le flux entrant dans la surface S est égal aux flux sortant de cette surface, c'est pour cette raison qu'on dit que le flux est conservatif.

Remarque : *Un tube de force est une surface cylindrique latérale formée par les lignes de champ.*

I.5 Application : calcul de *E* par le théorème de Gauss.

I.5.1 Champ crée par une sphère chargée avec ρ uniforme.

dq_1 et dq_2 symétriques par rapport au plan diamétral passant par $OM = r$.



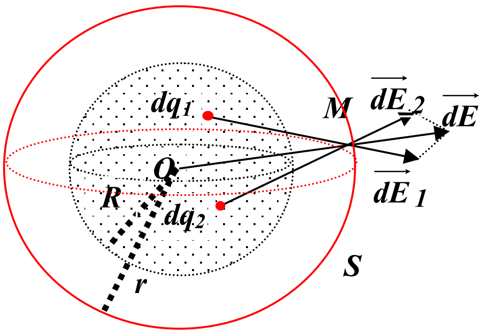
$$\left.\begin{array}{ll} dE_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_1}{r_1^2} & r_1 = r_2 \\ dE_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_1}{r_2^2} & dq_1 = dq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad dE_1 = dE_2$$

$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2$ a donc la même direction que r. On dit

qu'il est porté par r. Il admet donc une seule composante qui est la composante radiale. On dit que le champ est radial.

Le volume de la sphère peut être divisé en un ensemble de charges ponctuelles symétriques deux à deux. Chaque couple de charges va crée un champ élémentaire radial $\overrightarrow{dE}$. Le champ résultant, crée par l'ensemble des charges de la sphère sera donc radial.
De plus, quelque soit M, tant que OM reste égal à r, le champ va garder le même module. L'ensemble des points tels que r = constante est une sphère S de centre O et de rayon r.

D'où :



$$\Phi(\vec{E}/S) = \oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

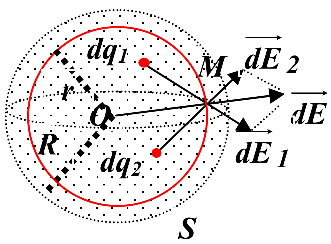
$$\vec{E} \,//\, \overrightarrow{dS} \quad \Rightarrow \quad \oiint_S E dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dV$$

$$E \text{ uniforme} \quad \Rightarrow \quad E\oiint_S dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dV$$

$$\Rightarrow \quad E\; S = \frac{\rho}{\varepsilon_0} V$$

Avec $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ nous aurons : $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

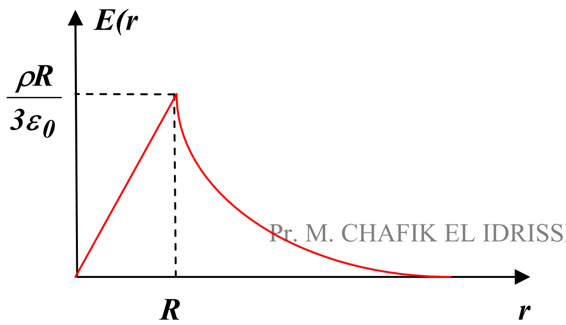
Remarque : S est la surface fermée à travers laquelle nous avons calculé le flux de E. S est une surface fictive. Elle n'existe pas réellement, nous l'avons inventé pour les calculs. On l'appelle aussi la surface de Gauss.
V est le volume chargé qui se trouve dans la surface fermée. Ne l'oublions pas, seules les charges à l'intérieur de la surface fermée auront un flux non nul.



Un autre cas s'impose c'est lorsque r est inférieur à R. C'est-à-dire quand le point M, où l'on veut calculer le champ se trouve dans la sphère chargée. Dans ce cas la surface fermée va être elle aussi dans la sphère chargée. Le même raisonnement nous conduit alors à :

$$E\; S = \frac{\rho}{\varepsilon_0} V$$

Avec $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Les charges à l'extérieur de S ont un flux nul et ne doivent pas



être prises en compte dans le calcul de V. Ce ci nous conduit à : $E(r)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$

On peut tracer les variations de E quand M varie dans l'espace, c'est-à-dire quand r varie. Il s'agit de tracer les variations de la fonction :

$$E(r)=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad \text{si } r>R$$

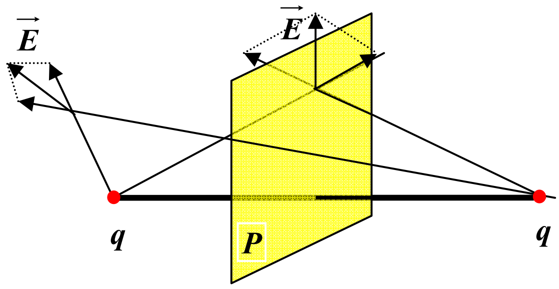
$$E(r)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \quad \text{si } r<R$$

On remarque que lorsque le point M est sur la surface de la sphère chargée, E vérifie : $\underset{r\to R^+}{E(r)} = \underset{r\to R^-}{E(r)} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$. Le champ est une fonction continue.

I.5.2 Etude des symétries

- Cas de deux charges ponctuelles identiques.

Si $M \in$ au plan de symétrie P, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M.



- Cas d'une distribution quelconque présentant un plan de symétrie (figure a).

Si $M \in$ au plan de symétrie, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M.

- Cas d'une distribution quelconque présentant deux plans de symétrie (figure b).

Si $M \in P_1$, $\vec{E}$ est dans P_1.

Si $M \in P_2$, $\vec{E}$ est dans P_2.

Si $M \in \Delta = P_1 \cap P_2$, $\vec{E}$ est porté par Δ. ==> Δ est une ligne de force.

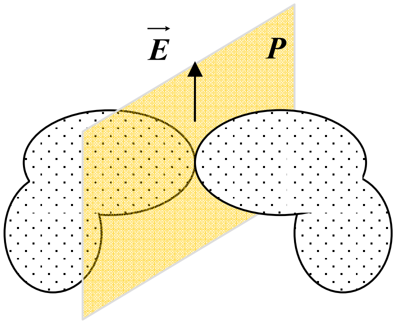


Figure a

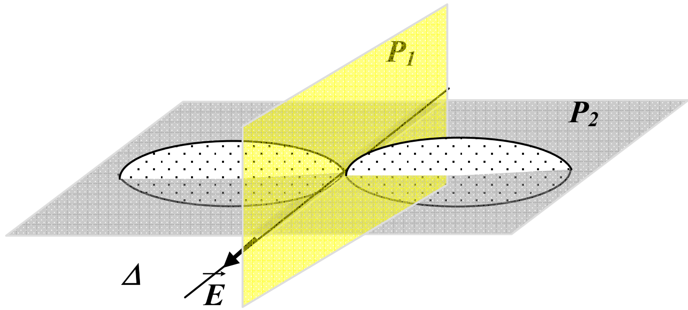


Figure b

Exemple :

* Sphère chargée (distribution de charge uniforme):

Il existe une infinité de plans diamétraux passant par ***OM*** (figure c). Ces plans se coupent selon la direction ***OM*** ==> *OM* ligne de champ.

* Plan chargé (distribution de charge uniforme):

Il existe une infinité de plans passant par ***HM*** et perpendiculaires au plan (figure d). Ces plans se coupent selon la direction ***HM*** ==> ***HM*** ligne de champ.

* Cylindre infini chargé (distribution de charge uniforme) :

$\Delta = P_1 \cap P_2 =$ ligne de champ (figure f).

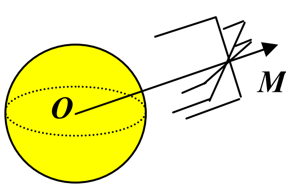


Figure c

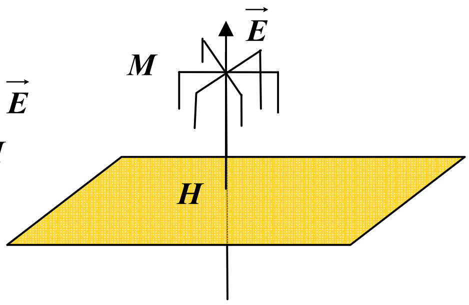


Figure d

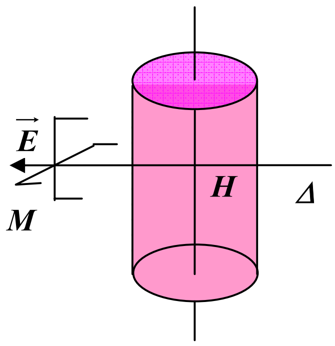


Figure f

II. Potentiel électrique dans le vide

II.1 Introduction.

II.1.1 Cas ou le champ est produit par une seule charge.

On reprend ici l'expression (1.15) qui donne la circulation d'un vecteur le long d'une courbe :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

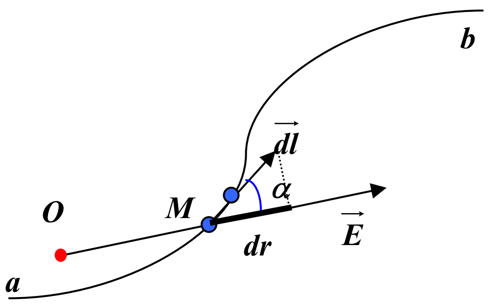
$\vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl}$ $\quad \vec{u}.\vec{dl} = dl\cos\alpha = dr$ est la projection de $\vec{dl}$ sur la direction OM.

D'où :

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha = \int_{ab}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{dr}{r^2}\right]_A^B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]$$

où $r_A = OA$ et $r_B = OB$.



La circulation de $\vec{E}$ ne dépend que de A et B, elle ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

On peut écrire :

$$C(\vec{E}/ab) = f(A) - f(B)$$

Cas particulier : AB est une courbe fermée $A \equiv B$. Dans ce cas $r_A = r_B$ et $C(\vec{E}/AB) = \oint_{AA} \vec{E}\vec{dl} = 0$. On en déduit d'après le théorème de Stokes que : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$. On dit que la circulation de $\vec{E}$ est conservative.

II.1.2 Le champ est produit par un ensemble de charges ponctuelles.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ placées en $O_1, O_2, \ldots, O_n$. En un point M de AB, ces chargent créent un champ : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n$.

$$\Longrightarrow C(\vec{E}/AB) = \int_{AB}\vec{E}\vec{dl} = \int_{AB}\vec{E}_1\vec{dl} + \int_{AB}\vec{E}_2\vec{dl} + \ldots + \int_{AB}\vec{E}_n\vec{dl} = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB)$$

et d'après II.1.1 :

$$C(\vec{E}_i/AB) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right].$$

II.2- Potentiel électrique.

$$C(\vec{E}/AB) = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iA} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iB}$$

$$= \textit{fonction de } A - \textit{fonction de } B$$

On définit ainsi une fonction de points à valeur scalaire ; on la note V et on l'appelle potentiel électrique. Ainsi on a :

$\int_{AB} \vec{E}\vec{dl} = V(A) - V(B) =$ différence de potentiel entre A et B.

En un point quelconque M entre A et B le potentiel s'écrit donc :

$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + k$ avec $r_i = OM$

Il est défini à une constante prés. Par convention on suppose que le potentiel à l'infini est nul : $V(\infty) = 0 \Rightarrow r_i \Rightarrow \infty \Rightarrow k = 0$.

Doù :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \qquad (3.1)$$

Une seule charge ponctuelle, placée en un point O, crée donc en tout point M de l'espace un potentiel : $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ où $r = OM$.

II.3- Relation entre le champ et le potentiel électrique.

Les propriétés électrostatiques de l'espace peuvent être représentés soit par un champ de vecteurs $\vec{E}(x,y,z)$ soit par un champ de scalaires $V(x,y,z)$. Cherchons la relation entre ces deux grandeurs.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\vec{E}\vec{dl}$$

Or $\quad dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{gradV}.\vec{dl}$

D'où $\quad \vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \qquad (3.2)$

On dit que $\vec{E}$ dérive du potentiel V.

La relation vectorielle (3.2) est équivalente à :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

<u>En coordonnées cartésiennes</u>

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_y = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

<u>En coordonnées cylindriques</u>

Remarque

A l'aide des équations (2.24) et (3.2), on en déduit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad (3.3)$$

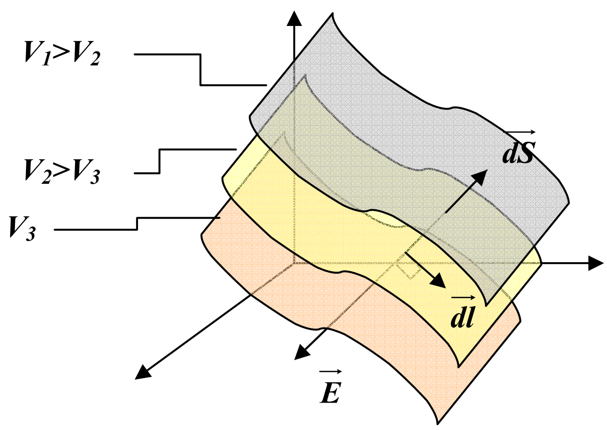
Dite équation de Laplace.

II.4- Surface équipotentielles.

Si l'on écrit $V(x,y,z)$ = constante, on peut en déduire une équation sous la forme $z = f(x,y)$ qui, dans le repère (X,Y,Z), serait une surface dont tous les points au même potentiel. On dit que c'est une **surface équipotentielle** ou encore une **surface de niveau**.

En fait il y a plusieurs surfaces de niveau. A chaque valeur de la constante correspond une surface.

Sachant que : $dV = \overrightarrow{gradV}.\vec{dl} = -\vec{E}.\vec{dl}$, alors $\vec{E} \perp \vec{dl}$ ($dV=0$). Le signe (-) montre que le champ se dirige vers les potentiels décroissants. Les lignes de champ sont donc toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

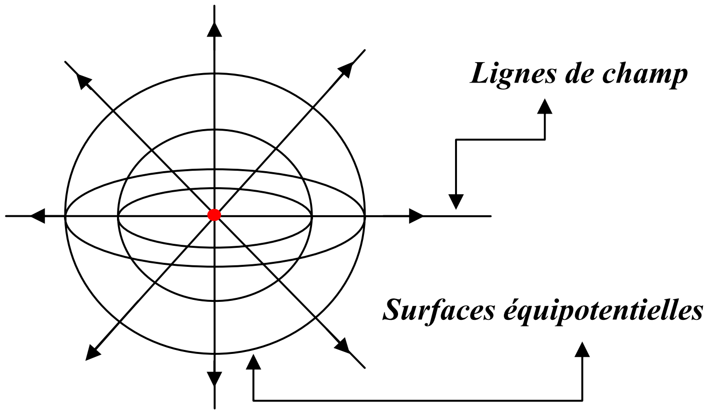


II.5- Application.

II.5.1- Cas d'une charge ponctuelle.

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

V= constante => ***r*** = constante
=> les surfaces équipotentielles seront des sphères de centre ***O*** (où est placée ***q***) et de rayon ***r***.



II.5.2- Cas de deux charges ponctuelles.

$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_A}-\frac{q}{r_B}\right]=$ Constante => $q\left[\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right]=$constante => les surfaces équipotentielles sont des surfaces de révolution autour de l'axe contenant les deux charges (voir dipôle électrique).

II.5.3- Etude du dipôle.

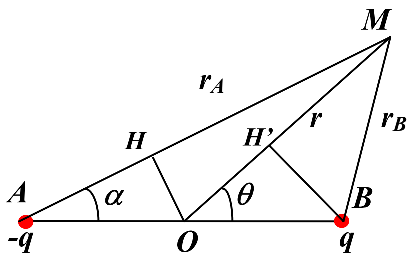
a- Définition.

Un dipôle est un ensemble de deux charges électriques ponctuelles +***q*** et –***q*** séparées par une distance ''***a***'' très petite devant ***r* = *OM*** qui est la distance du dipôle au point d'observation M.

On appelle moment dipolaire du dipôle la grandeur : $\vec{P}=q\overrightarrow{AB}=qa\vec{i}$. ***P*** s'exprime en ***C.m***. Souvent on utilise le Debye : ***1 Debye*** = $\frac{1}{3}10^{-19}$ ***C.m***.

On distingue deux sortes de dipôles : le dipôle rigide pour lequel le moment ***P*** reste constant indépendamment du champ extérieur dans le quel il est plongé (les molécules polaires) et le moment non rigide pour lequel ***P*** varie sous l'action d'un champ extérieur (la molécule HCl).

b- Potentiel crée par le dipôle.



$$V(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r_A}-\frac{q}{r_B}\right]$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_A-r_B}{r_Ar_B}$$

$OM = r >> a \;\Rightarrow\; \theta \approx \alpha$

$$\left|\begin{aligned} r_A &= AH + HM \\ &\approx \frac{a}{2}\cos\theta + r \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left|\begin{aligned} r &= OH' + H'M \\ &\approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_B \end{aligned}\right.$$

D'où :

$$\left|\begin{aligned} r_A - r_B &= a\cos\theta \\ r_A r_B &= r^2 \end{aligned}\right.$$

Donc $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}=\frac{\vec{P}\,\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Remarque :

Quand $\theta = \pi/2$, $M \in$ au plan médiateur de AB => $V = 0$, c'est une surface équipotentielle particulière.

c- Champ crée par le dipôle.

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V \iff \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} E_r = \dfrac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante radiale} \\ E_\theta = \dfrac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante orthoradiale} \end{cases}$$

D'où :

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

Remarque : $tg\varphi=\frac{E_\theta}{E_r}=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta} \;\Rightarrow\; tg\varphi=\frac{1}{2}tg\theta$

- Si $M \equiv M_1$, $\theta = 0$ 1ère position de Gauss. $E_\theta = 0$ et $E = E_r = \frac{2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.
- Si $M \equiv M_2$, $\theta = \pi/2$ 2ème position de Gauss. $E_r = 0$ et $E = E_\theta = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

- Si $M \equiv M_3$, $\theta = \pi$. $E_\theta = 0$ et $E = E_r = \dfrac{-2P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.
- Si $M \equiv M_4$, $\theta = -\pi/2$. $E_r = 0$ et $E = E_\theta = \dfrac{-P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

d- Lignes de champ et Surfaces équipotentielles.

Lignes de champ :

Un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ sur une ligne de champ a pour composante :

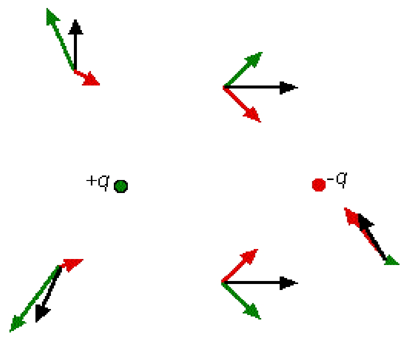
$$\vec{dl} \begin{cases} dr \\ rd\theta \end{cases} \text{ donc } tg\varphi = \frac{1}{2} tg\theta = \frac{rdr}{d\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \Rightarrow \ln r = 2\ln\sin\theta + \ln k$$

Soit : $r = k\sin^2\theta$

Surfaces équipotentielles :

$V = cte \Rightarrow \dfrac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = cte \Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{r^2} = cte$. Soit : $r^2 = k' \cos\theta$.

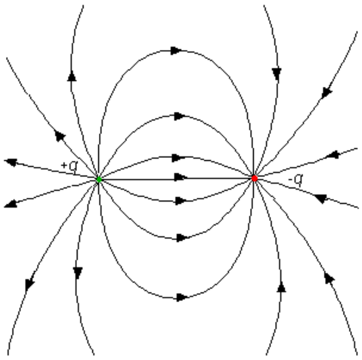
Avant de tracer les lignes de champ, il peut être utile de déterminer l'orientation du champ électrique résultant en quelques points de l'espace.

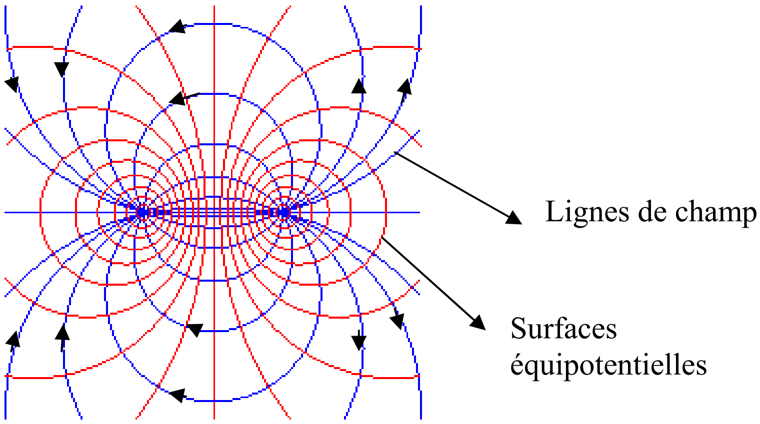


Vecteurs champ produits par la charge **+q** (en vert), par la charge **-q** (en rouge) et le champ résultant (en noir).

Lorsque l'orientation du champ résultant est connue pour plusieurs points de l'espace il est plus facile de tracer convenablement les lignes de champ électrique.

Le nombre de lignes de champ produites par la charge positive est le même que le nombre de lignes de champ absorbées par la charge négative. Les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.


+q
-q


Lignes de champ
Surfaces
équipotentielles

III. LES CONDUCTEURS

III.1 Introduction.

III.1.1 Conducteurs et isolants.

Un conducteur est un élément de la matière dont les charges peuvent se déplacer sous l'action d'un champ extérieur. Les charges mobiles sont des électrons dans le cas d'un métal et des ions dans le cas d'une solution d'électrolyte.

Un isolant est un élément de la matière dont les charges sont liées à chaque atome et ne sont pas libres de se déplacer même sous l'action d'un champ extérieur.

Si l'on dépose une charge en un point d'un conducteur, elle créera un champ électrique en tous les points de celui-ci ; d'où déplacement des charges mobiles et à l'équilibre la charge sera répartie en différents points du conducteur. Par contre pour un isolant, il n'y a pas déplacement de charges et la charge initiale restera à l'endroit où elle a été déposée.

Dans la réalité un conducteur parfait n'existe pas de même qu'un isolant parfait est un cas idéal. Il n'existe que des mauvais isolants et des mauvais conducteurs.

Un conducteur est dit en **équilibre électrostatique** lorsque toutes les charges qu'il contient sont **immobiles**.

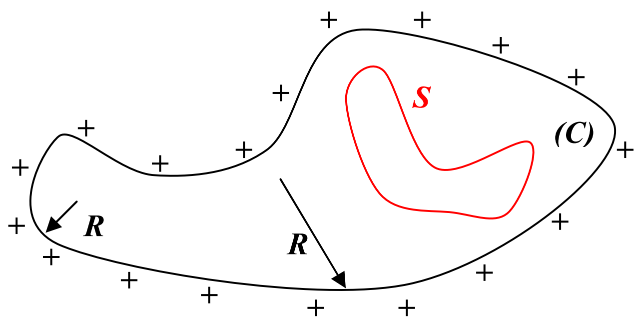
III.1.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre.

Soit un conducteur (***C***) isolé, immobile et initialement neutre.

Isolé : pas d'influence entre le conducteur et les charges qui peuvent se trouver à son voisinage.

Immobile : si le conducteur n'est pas immobile ses charges ne le seront pas non plus.

Initialement neutre : sa charge totale est nulle $\Sigma Q = 0 \Rightarrow \rho = 0, E = 0$ et $V = 0$.



On dépose une charge Q en un point de ce conducteur. A l'équilibre toutes les charges sont immobiles : $\sum \vec{F} = \vec{0} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow V = cte$.

Théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\vec{dS} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$ (***S*** est une surface fermée quelconque dans le conducteur) => $\sum q_i = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Donc la charge ne peut être que sur la surface du conducteur. La distribution est superficielle (σ). Toute surface dans le conducteur est équipotentielle. On en déduit que toute la surface du conducteur est équipotentielle. Le potentiel étant une fonction continue, on en déduit que tout le conducteur est équipotentiel. A l'extérieur du conducteur, les lignes de champ seront donc perpendiculaires à sa surface.

σ varie d'un point de la surface à l'autre. En effet, si le rayon de courbure est faible σ augmente et si le rayon de courbure est grand σ diminue (voir TD).

Récapitulatif

Un conducteur (C) chargé en équilibre électrostatique est caractérisé par :

- ***E = 0*** dans tout le volume de (C).
- Le volume de (C) est équipotentiel.
- La distribution de charge est superficielle.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de (C).

Cas particulier : conducteur creux.

Le potentiel étant une fonction continue => dans le creux le potentiel est aussi constant et égale au potentiel du conducteur => $\Sigma Q_i = 0$ => absence de charges dans et sur la surface du creux. Les charges se repartissent uniquement sur la surface externe. **Un conducteur garde ses propriétés même s'il est creux**.

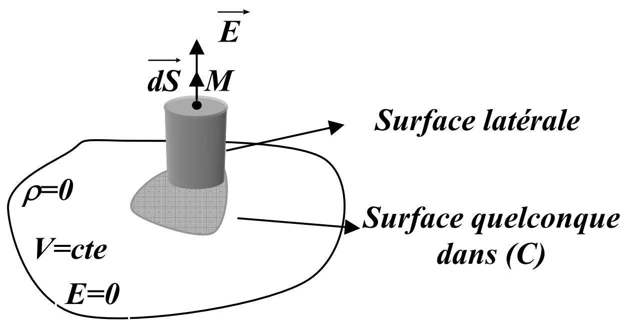
III.2. Théorème de Coulomb- Elément correspondants.

III.2.1 Théorème de Coulomb.

Soit un point M placé au voisinage d'un conducteur (C) en équilibre. Et soit Σ une surface fermée composée de : ***Σ = dS + surface latérale + surface quelconque dans (C)***.

$$\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \Phi(\vec{E}/dS) + 0 + 0 = \oiint_\Sigma \vec{E}\,\vec{dS}$$

$$= \oiint_\Sigma E dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}$$



Théorème de Gauss :

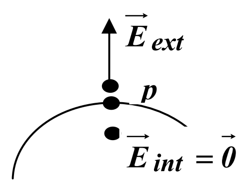
$$\oiint_\Sigma E dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_\Sigma \sigma\, dS$$

D'où : $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Au voisinage de la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique prés d'un point où la densité de charge est σ, le champ est normal à la surface du conducteur et il est égal à σ/ε_0.

Remarques :

- Dans le conducteur le champ est nul $E_{int} = 0$. A son voisinage il vaut $E_{ext} = \sigma/\varepsilon_0$. Il y a donc discontinuité du champ à la traversée d'une couche mince chargée. On suppose que sur la surface du conducteur (au point p) le champ est la moyenne entre E_{ext} et E_{int} :

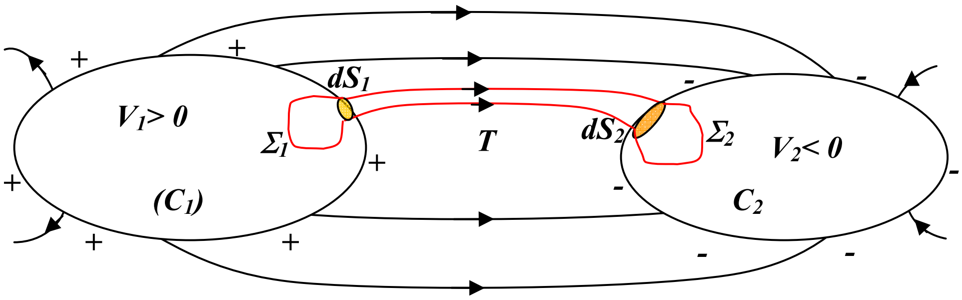


$$E(P) = \frac{E_{int} + E_{ext}}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

- Au point p il y a une charge (soit dq cette charge). Le point p est soumis donc à une force électrostatique $df = dq\ E$ => $df = \sigma dS \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$. On définit au point p, la pression électrostatique comme : $P = \dfrac{df}{dS} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

III.2.2 Eléments correspondants.

Soient deux conducteurs portant des distributions de charges opposées. Les lignes de champ auront l'allure :



$\Sigma_1 + \Sigma_2 + T = S =$ *surface fermée*.

T = ***tube de champ***. Il découpe sur ($C1$) dS_1 et sur ($C2$) dS_2. Soient dq_1 la charge contenue dans dS_1 et dq_2 celle contenue dans dS_2. Dans C_1 et C_2 le flux de E est nul ($E = 0$) et à travers T le champ et le vecteur surface sont perpendiculaires :

$$\Phi(\vec{E} / S) = 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}(dq_1 + dq_2)$$

$$dq_1 = - dq_2$$

Deux éléments, découpés sur deux conducteurs différents, par un même tube de champ, sont appelés éléments correspondants.

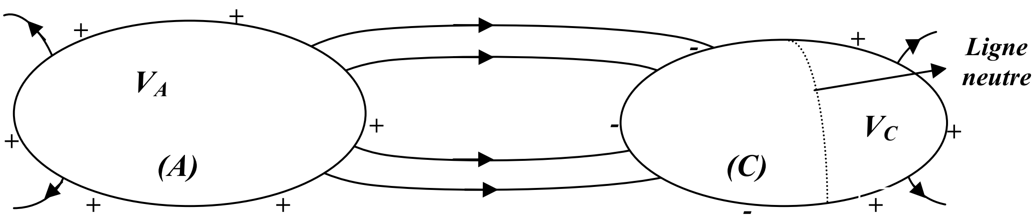
Deux éléments correspondants portent nécessairement des charges égales en module mais de signe contraire. Ils ne peuvent jamais appartenir à un même conducteur.

III.3. Influences électrostatiques.

III.3.1 Influence sur un conducteur isolé.

Soit un conducteur (C) initialement neutre et isolé => $Q=0$, $V=0$, (C) contient autant de charges + que de charges -. Et soit un conducteur (A) chargé.

En approchant (C) de (A), (C) va subir électriquement des modifications. On dit qu'il est **influencé**. A cause de l'attraction coulombienne, sur la face de (C) qui regarde (A), il y a apparition de charges (–) et sur la face opposée il y a apparition de charges (+). A l'équilibre nous aurons :

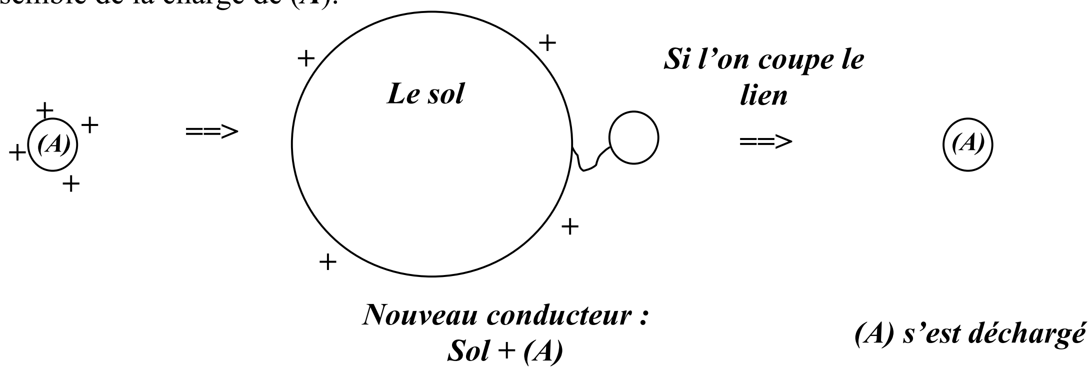


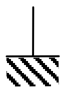
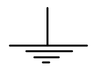
Les lignes de champ partent de (***C***) vers l'infini => $V_C > V_\infty = 0$
et de (***A***) vers (***C***) => $V_A > V_C$.
D'où : - Etat initial $Q_C = 0$ $V_C = 0$
- Etat final Q_C 0 $V_C > 0$

Le conducteur (***C***) après influence a gardé une charge totale nulle mais son potentiel est passé de zéro à une valeur positive.

III.3.2 Influence sur un conducteur relié au sol.

La terre est un grand conducteur (grand réservoir de charges). Ce conducteur est neutre car il y a autant de charges **+** que de charges **-**. Si l'on relie un conducteur (***A***) chargé au sol, l'ensemble [sol + (***A***)] constituera un nouveau conducteur. La charge, initialement répartie sur la surface de (***A***), va se répartir sur toute la surface du nouveau conducteur. Etant donné que la surface de (***A***) est négligeable devant celle de la terre tout semble comme si la terre a absorbé l'ensemble de la charge de (***A***).



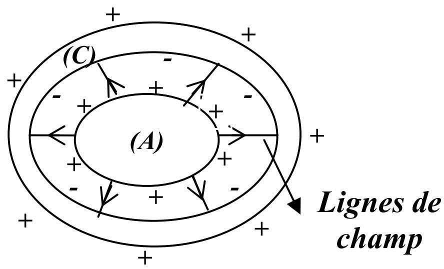
On schématise le sol par le symbole :  ou 

III.3.3 Influence totale.

On dit qu'il y a influence totale chaque fois que le corps influencé entoure complètement le corps qui l'influence.

Soient (***C***) un conducteur creux et initialement neutre et (***A***) un conducteur portant la charge Q_A. On place (***A***) dans (***C***). A l'équilibre, il va y avoir apparition de la charge ($-Q_A$) sur la face interne S_i de (***C***) et $+Q_A$ sur sa face externe S_e.

Si ($\boldsymbol{C}$) contenait la charge $\boldsymbol{Q_C}$ à l'état initial, sa charge sur $\boldsymbol{S_e}$ après influence serait $\boldsymbol{Q_A + Q_C}$.
Si l'on relie ($\boldsymbol{C}$) au sol toute la charge sur $\boldsymbol{S_e}$ va disparaître.



III.3.4 Capacité et coefficient d'influence.

a- Capacité d'un conducteur seule et isolé

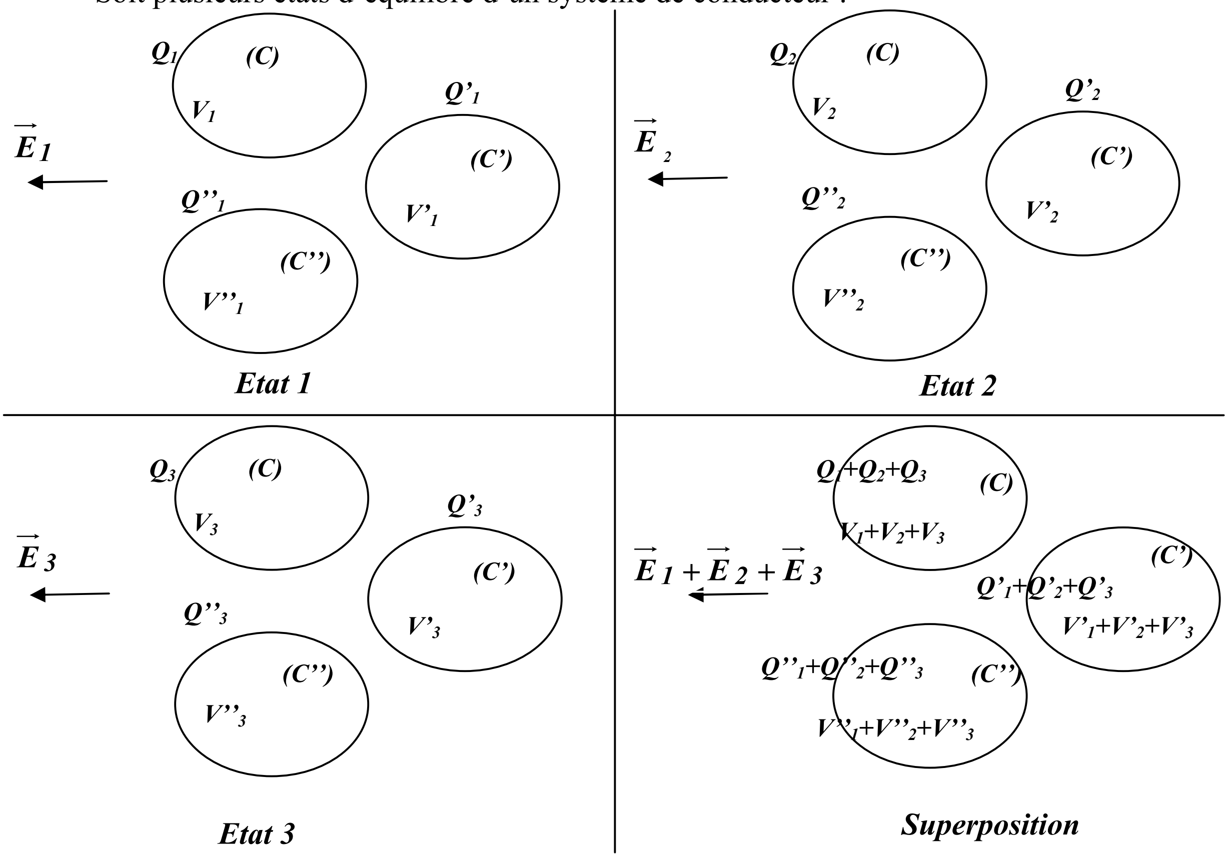
Soit ($\boldsymbol{C}$) un conducteur ayant un potentiel $\boldsymbol{V}$ et une charge $\boldsymbol{Q}$. Par définition $\boldsymbol{C = \frac{Q}{V}}$ est la capacité du conducteur. $\boldsymbol{C}$ ne dépend que des dimensions et de la forme géométrique du conducteur. Elle est indépendante de sa nature, de son potentiel ou de sa charge.

La capacité s'exprime en Farad ($\boldsymbol{F}$). Le Farad est une unité très grande, souvent on utilise les sous-multiples : picofarad ($\boldsymbol{1\ pF=10^{-12}\ F}$), nanofarad ($\boldsymbol{1\ nF=10^{-9}\ F}$), microfarad ($\boldsymbol{1\ \mu F=10^{-6}\ F}$).

b- Système de conducteur en équilibre électrostatique.

*** <u>Théorème de superposition</u>**

Soit plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur :



A partir de plusieurs états d'équilibre d'un système de conducteur, on obtient un nouvel état d'équilibre en les superposant. Les densités, les charges totales sur chaque conducteur et le potentiel en tout point de l'espace sont les sommes algébriques des valeurs dans chaque état d'équilibre. Le champ résultant en un point est la somme vectorielle des champs crées par chaque état d'équilibre. Toute superposition d'états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre.

*** Capacité et coefficients d'influence**

Soit n conducteurs A_1, A_2, …, A_n ayant les charges Q_1, Q_2, …, Q_n et les potentiels V_1, V_2, …, V_n. Supposons les états d'équilibre suivant :

1er état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_1. Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_1.

	A_1	A_2	…	A_n
Potentiel	V_1	0	…	0
Charge	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	…	$C_{n1}V_1$

2ème état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_2. Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_2.

	A_1	A_2	…	A_n
Potentiel	0	V_2	…	0
Charge	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	…	$C_{n2}V_2$

$n^{ème}$ état, tous les conducteurs sont reliés à la terre sauf A_n. Les charges de tous les conducteurs seront proportionnelles au seul potentiel non nul V_n.

	A_1	A_2	…	A_n
Potentiel	0	0	…	V_n
Charge	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$	…	$C_{nn}V_n$

Superposition de ces n états d'équilibre :

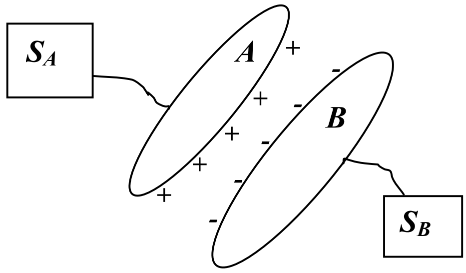
	A_1	A_2	…	A_n
Potentiel	V_1	V_2	…	V_n
Charge	$C_{11}V_1+C_{12}V_2+\ldots+C_{1n}V_n$	$C_{21}V_1+C_{22}V_2+\ldots+C_{2n}V_n$	…	$C_{n1}V_1+C_{n2}V_2+\ldots+C_{nn}V_n$

C_{ii} ($i = 1\ldots n$) est la capacité du conducteur A_i en présence des autres conducteurs. C_{ii} est différente de la capacité C d'un conducteur seul. Les C_{ii} sont toujours ≥ 0.

C_{ij} (avec $i \neq j$) est dite coefficient d'influence entre le conducteur A_i et le conducteur A_j. Dans les tableaux ci-dessus, on peut permuter A_i avec A_j pour montrer facilement que $C_{ij} = C_{ji}$. Les C_{ij} sont toujours ≤ 0.

III.3.5 Les condensateurs.

Soient deux conducteurs ***A*** et ***B*** reliés à deux sources de charges S_A et S_B. Chaque fois qu'il y a apparition d'une charge (+) sur ***A***, il y a apparition, par influence d'une charge (-) sur ***B***. L'ensemble des deux conducteurs constitue ce qu'on appelle un condensateur. ***A*** et ***B*** sont appelés les **armatures** du condensateur.



III.3.5.1 Capacité d'un condensateur.

Soient :

A : conducteur (Q_A,V_A)

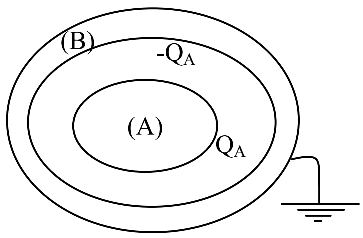
B : conducteur creux, neutre et relié au sol

Après influence il apparaît la charge $-Q_A$ sur la face interne de ***B***.

Nous aurons :

$$Q_A = C_{11}V_A + C_{12}V_B = C_{11}V_A$$
$$Q_B = C_{21}V_A + C_{22}V_B = C_{21}V_A = -Q_A$$
$$\Rightarrow C_{11}V_A = -C_{21}V_A \Rightarrow C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$$

Isolons ***B*** du sol sans oublier que les capacités et les coefficients d'influence ne dépendent que de la forme des conducteurs. Q_B n'est plus égale à $-Q_A$ et nous aurons les équations d'influence :



$$Q_A = C_{11}V_A + C_{12}V_B \qquad \text{soit :} \qquad Q_A = C\,V_A - C\,V_B$$
$$Q_B = C_{21}V_A + C_{22}V_B \qquad\qquad\qquad Q_B = -C\,V_A + C_{22}V_B$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}$$

C : est dite capacité du condensateur. C'est le rapport entre la charge de l'armature interne et la différence de potentiel entre les deux armatures en commençant par l'armature interne.

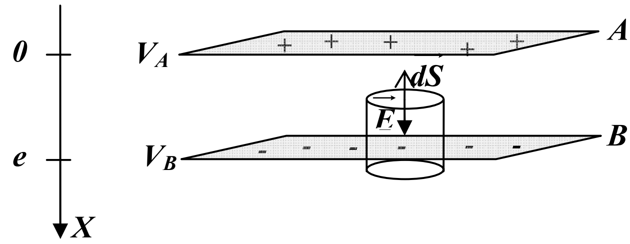
Si l'on relie ***A*** et ***B*** par un fil conducteur, les deux faces en regard vont se neutraliser. On dit que le condensateur s'est déchargé.

III.3.5.2 Application.

***Condensateur plan**

On suppose que les armatures sont infinies.

S = deux surfaces de base (***SB1*** et ***SB2***) + surface latérale (SL).



$$\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \Phi(\vec{E}/SB1) + \Phi(\vec{E}/SB2) + \Phi(\vec{E}/SL)$$
$$= -ES + 0 + 0$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}(-\sigma)S \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2ème méthode :

$$\vec{E} = \vec{E}(plan+) + \vec{E}(plan-)$$
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + (-\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}) \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La charge Q contenu dans σ est $Q = \sigma S$ donc $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$

$$dV = -E\,dx \Rightarrow \int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_0^e E dx = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}e \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}e$$

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Nous remarquons une autre fois que la capacité ne dépend ni de la charge ni du potentiel des armatures. Elle dépend des dimensions du condensateur et du milieu dans lequel il est placé (ici le vide : ε_0).

Si l'on place le condensateur dans un milieu, autre que le vide, caractérisé par une permittivité ε, la capacité aura pour expression : $C = \frac{\varepsilon S}{e}$ avec $\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$ ou ε_r est la permittivité relative du milieu considéré.

III.3.5.3 Groupement de condensateur.

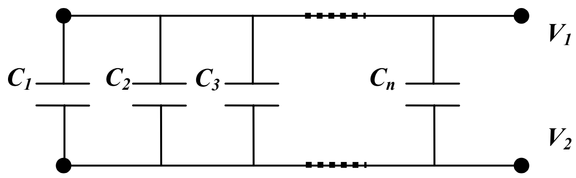
***En parallèle**

On schématise un condensateur par :



Les deux traits verticaux sont ses armatures.

Supposons que l'on a n condensateurs soumis à une différence de potentiel (V_1-V_2) et groupés comme l'indique le schéma suivant :



On dit que les n condensateurs sont branchés en parallèle car ils sont soumis à la même différence de potentiel. Nous avons : $Q_1 = C_1(V_1\text{-}V_2)$, $Q_2 = C_2(V_1\text{-}V_2)$, …, $Q_n = C_n(V_1\text{-}V_2)$. Or la charge totale répartie sur les condensateurs est $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$

=> $Q = C_1(V_1\text{-}V_2) + C_2(V_1\text{-}V_2) + \ldots + C_n(V_1\text{-}V_2)$

$= (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)(V_1\text{-}V_2)$ (2.3)

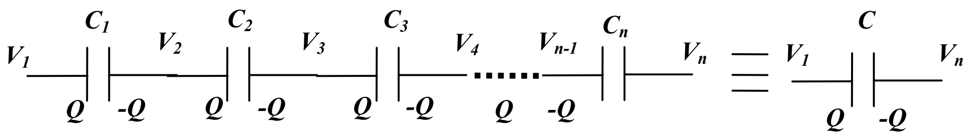
On veut que tous ces condensateurs soient équivalents à un seul condensateur de capacité C_{equ} soumis à la même différence de potentiel (V_1-V_2) avec sa charge Q obéissant à :

$Q = C_{equi}(V_1\text{-}V_2)$. (2.4)

En comparant (2.3) et (2.4) on en déduit : $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$

***En série**

Maintenant supposons que les condensateurs sont groupés selon :



On dit que les n condensateurs sont branchés en série.

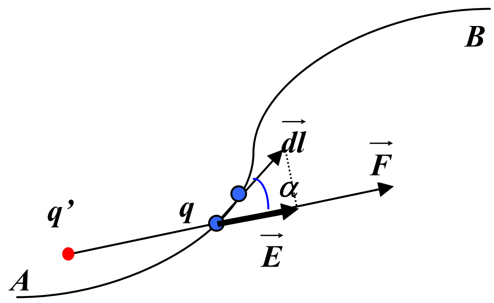
Nous avons : $Q = C_1(V_1\text{-}V_2)$, $Q = C_2(V_2\text{-}V_3)$, …, $Q = C_n(V_{n-1}\text{-}V_n)$ d'une part et $Q = C(V_1\text{-}V_n)$ d'autre part.

Ce qui nous donne : $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

III.4. Energie électrostatique.

III.4.1 Définition.

Soit q une charge qui se déplacent, sous l'effet d'un champ extérieur $\vec{E}$, de A vers B. $\vec{E}$ est crée par une autre charge q'. Le travail nécessaire pour faire déplacer q de dl est :



$$dW = \vec{F}\,\vec{dl} = Fdl\cos\alpha = qEdl\cos\alpha$$

Correction de signe

Si la force est résistante $\cos \alpha < 0$ et $dW > 0$
Si la force est motrice $\cos \alpha > 0$ et $dW < 0$ donc dans les deux cas il faut ajouter un signe (-) à l'expression dW. On écrit alors :

$$dW = -\vec{F}\,\vec{dl} = -Fdl\cos\alpha = -qEdl\cos\alpha$$

=> $W_{A->B} = q\int_{AB} Edl\cos\alpha = q(V_A - V_B)$

Si A est à l'infini $V_A = 0$ => $W = q\ V_B$. W est le travail nécessaire pour ramener la charge q de l'infini au point B.

On appelle énergie électrostatique d'une charge **q** *soumise sous l'action d'un champ électrique, le travail qu'il faut fournir contre les forces électrostatiques pour ramener cette charge de l'infini ou le potentiel est nul jusqu'à sa position actuelle ou le potentiel est* **V**.

$$W_e = qV$$

III.4.2. Energie d'un conducteur.

Supposons que l'on charge un conducteur :

Etat initial	$Q = 0$	$V = 0$
Etat intermédiaire	q	v
Etat final	Q	V

Plaçons-nous à l'état intermédiaire. La charge se fait progressivement en amenant dq de l'infini jusqu'au conducteur ou le potentiel est v. Il faut donc accomplir le travail $dW = dqv$. A l'état final, nous aurons accompli le travail : $W = \int vdq = \int \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}$

=> $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{CV^2}{2} = \dfrac{QV}{2}$

<u>Remarque</u>

L'énergie d'un système de conducteurs en équilibre est la somme des énergies de chaque conducteur. $W = \sum_i \dfrac{Q_i V_i}{2}$

L'énergie d'un condensateur va être donc $W = \frac{1}{2}QV$, où Q est la charge d'une armature et V son potentiel.

Exercices d'électrostatique

I- Calcul direct de champs électrostatiques.

On peut calculer le champ électrostatique par trois méthodes :

- ⇨ De façon directe en utilisant les formules **(2)** et **(3)** ci-dessous.
- ⇨ A l'aide du théorème de Gauss dans le cas de distributions de charges présentant des symétries.
- ⇨ De façon indirecte en calculant d'abord le potentiel V et en suite en utilisant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad V}$ (voir plus loin).

On doit retenir :

- ⇨ Loi de Coulomb : Force exercée par q_0 (placée en un point M) sur une charge q (placée en un point P).

$$\vec{r} = \overrightarrow{MP} \;;\; \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \;;\; \vec{F}_{q_0 q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\vec{u} \quad (1)$$

- ⇨ Champ électrostatique crée en un point P par une charge ponctuelle située en M.

$$\vec{r} = \overrightarrow{MP} \;;\; \vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} \;;\; \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} \quad (2)$$

- ⇨ Champ électrostatique crée en un point P par une distribution de charges. L'élément de charge dq est centré sur M.

$$\vec{E} = \int_D \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} \quad (3)$$

$dq = \lambda\, dl$ ***ou*** $dq = \sigma\, ds$ ***ou*** $dq = \rho\, dv$ selon qu'il s'agisse d'une distribution de charges linéique, surfacique ou volumique.

EXE 1

Deux charges ponctuelles égales, placées à une distance a l'une de l'autre, se repoussent avec une force d'intensité F.
De combien faudrait-il les rapprocher pour que la force de répulsion prenne une intensité double.

EXE 2

Aux sommets A, B, C, D d'un carré de coté $2a$, on place respectivement des charges électriques ayant pour valeur $+q, +2q, -2q$ ***et*** $2q$ $(q>0)$.
Trouver la force électrostatique qui s'exerce sur une charge positive q_0 placée au centre du carré.

EXE 3

Deux charges ponctuelles $+q$ et $+4q$ sont placées en deux point A et B distants de a. Montrer qu'il existe un point sur la droite AB où le champ est nul.

EXE 4

Deux charges ponctuelles de même valeur $+q$ sont placées en deux point $A(-a,0)$ et $B(a,0)$.

Calculer le champ électrostatique au point ***M(0,y)***.
Tracer l'allure de ***E(y)*** pour $y > 0$.

EXE 5

Une charge ponctuelle ***-2q*** est placée à l'origine ***O*** des coordonnées. Deux charges égales, de valeur ***+q*** sont placées sur l'axe des ***X*** aux points d'abscisse ***-a*** et ***+a***. Déterminer le champ électrostatique sur les deux axes ***OX*** et ***OY***.

EXE 6

Un segment de droite ***AB***, de longueur ***2a***, porte une distribution continue de charges dont la densité linéique supposée positive λ est uniforme (constante). On prend cette droite comme axe des ***X***; l'origine ***O*** étant au milieu de ***AB***. Soit ***OY*** l'axe perpendiculaire à ***OX***.
1) En considérant deux éléments de charge centrés en deux points P_1 et P_2, symétriques par rapport à l'origine ***O***, montrer que le champ électrostatique sur l'axe ***OY*** est porté par ce dernier.
2) Calculer la valeur de ce champ.
3 Examiner ce que devient l'expression obtenue quand la distance ***AB*** augmente indéfiniment.

EXE 7

Un anneau fin de rayon ***R***, porte une densité linéique de charges λ constante. Calculer en tout point ***M*** de l'axe de l'anneau le champ ***E(M)***.

EXE 8

Un disque plan circulaire de rayon ***R*** porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité σ. Un point M de l'axe de révolution du disque est repéré par sa distance z au centre ***O***.
1) Calculer ***E(M)***.
2) En déduire le champ crée par un plan infini.

EXE 9

Un plan ***P*** est percé d'une ouverture circulaire de centre ***O*** et de rayon ***R***. il porte une distribution de charges surfacique uniforme de densité σ.
En utilisant les résultats des exercices précédents et le principe de superposition, calculer le champ électrostatique en un point ***M*** de la droite perpendiculaire à ***P*** et passant par ***O***.

II- Théorème de GAUSS

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée est égal à la somme des charges à l'intérieur de cette surface divisée par la permittivité du milieu où sont placées ces charges.

$$\Phi(\vec{E} / S) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

Pour appliquer le théorème de Gauss il faut :

- ⇨ Déterminer d'abord la direction du champ $\vec{E}$ (étude des symétries).
- ⇨ Choisir une surface fermée ***S*** de sorte que $\vec{E}$ soit perpendiculaire ou parallèle à $\overrightarrow{dS}$ et son module soit constant. Ainsi ***E*** peut sortir de l'intégrale.
- ⇨ Calculer Q_{int}.

⇨ Faire l'égalité des deux membres de la relation **(4)** et en déduire E.

EXE 10

1) Une charge q est placée au centre d'une sphère de rayon r. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique crée par cette charge. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère.
2) La charge q est maintenant placée au centre d'un cylindre de rayon R et de hauteur $2L$. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre.
3) La charge q est maintenant placée entre deux plans P_1 et P_2 parallèles et indéfinis. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers ces deux plans.
4) Quelle conclusion fondamentale peut-on tirer de cette étude ?

EXE 11

On considère la surface fermée d'un cube d'arête a placé dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E} = x^2\vec{i}$
1) Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface total du cube.
2) En déduire la charge intérieure du cube.
3) Retrouver la charge totale dans le cube en calculant, en tout point de l'espace, la densité volumique de charges ρ.

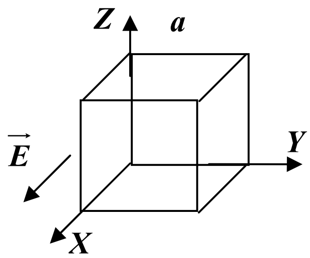


Figure 1

EXE 12

1) Calculer le champ électrostatique crée, en tout point M de l'espace, par une distribution volumique de charges, de densité uniforme ρ, contenue entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$.
2) Tracer la courbe $E(r)$ avec $r = OM$. E est-il une fonction continue ?
3) Retrouver la valeur de E si R_1 tend vers R_2. E reste-t-il une fonction continue ? Expliquer.
N.B. : *Dans la solution on traite aussi les résultats de l'exercice* **17**.

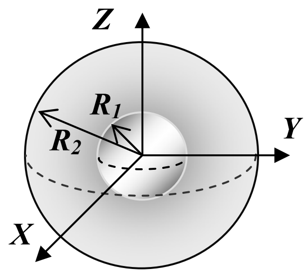


Figure 2

EXE 13

Un cylindre infini d'axe OZ et de rayon R porte une distribution surfacique de charges de densité uniforme σ.
1) Calculer le champ électrostatique en tout point M de l'espace.
2) Tracer les variations du champ en fonction de la distance $r = hM$ où h est la projection de M sur l'axe Z.

EXE 14

Soit une sphère, de centre O et de rayon R portant une charge répartie en volume avec une densité ρ non constante.
Calculer le champ électrostatique en un point M à la direction r' de O $(r' > R)$ dans les deux cas suivants :
1) $\rho = a\,r$ où $0 < r < R$
2) $\rho = b\,/\,r$

EXE 15
On considère trois distributions de charges dont les vecteurs champs électrostatiques sont donnés par:

1) $\vec{E}_1 = 2axy\vec{i} + a\left(x^2 - y^2\right)\vec{j}$

2) $\vec{E}_2 = -2\left(ax\vec{i} + ay\vec{j} + bz\vec{k}\right)$

3) $\vec{E}_3 = ay\vec{i} + ax\vec{j}$

Déterminer dans chacun des cas la densité volumique de charges ρ.

EXE 16
Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer, en tout point de l'espace, la direction du champ crée par une distribution de charges répartie sur un segment de droite, sur un cylindre fini ou sur n'importe quelle figure géométrique contenant moins de deux plans de symétries.

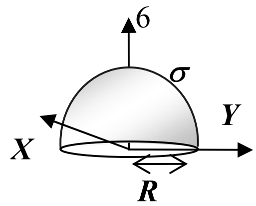
III- Calcul indirect du champ électrostatique.

EXE 17
Reprendre l'exercice **12/3** et calculer en tout point de l'espace le potentiel électrostatique. Tracer ensuite les variations de V en fonction de $r = OM$. Le potentiel est-il une fonction continue ?
N. B. : *Pour la solution voir exercice* **12**.

EXE 18
Une demi sphère creuse de centre O et de rayon R est chargée avec une densité surfacique σ. Calculer le potentiel électrostatique en O dans les deux cas suivants :

1) $\sigma = \sigma_0$ = constante positive.

2) $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, où θ est l'angle des coordonnées sphériques.



EXE 19
Un disque plan circulaire de centre O et de rayon R porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité σ.
1) Déterminer directement le potentiel électrostatique $V(z)$, en un point M, de l'axe de révolution du disque, repéré par sa distance z au centre O (prendre seulement les points M ayant $z > 0$).
2) En déduire le champ $E(z)$.

EXE 20
Un anneau fin de rayon R porte une densité linéique de charges λ qui varie avec l'angle des coordonnées polaires θ selon la loi $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$; avec λ_0 une constante positive. Calculer le potentiel et le champ au centre de l'anneau.

EXE 21
Un dipôle de moment $\vec{p} = qa\vec{i}$ est constitué de deux charges ponctuelle $-q$ et $+q$ placées dans le vide aux points **A** et B de l'axe OX de part et d'autre de O. La distance $AB = a$. Un point M

éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.
1) Calculer le potentiel $V(M)$ du dipôle au point **M**, en déduire le module et l'orientation du champ électrostatique.
2) Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_0$ orienté suivant l'axe OX. Le potentiel de ce champ est nul à l'origine O.
a- Donner l'expression du potentiel électrostatique au point M.
b- Quelles sont les surfaces équipotentielles $V = 0$.
c- Quelle est la valeur du champ sur l'équipotentielle $V = 0$ en fonction de E_0 et θ.

IV- Conducteurs électrostatiques

Un conducteur (C) chargé en équilibre électrostatique est caractérisé par :
- $E = 0$ dans tout le volume de (C).
- Le volume de (C) est équipotentiel.
- La distribution de charge est superficielle.
- Les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface de (C).
- Un conducteur garde ses propriétés même s'il est creux.

EXE 22
Sur le sommet d'un conducteur sphérique de rayon R, on pose un petit disque conducteur de rayon r et de masse m.
Calculer, en fonction de m, R, r et g, la valeur du potentiel V de la sphère pour laquelle le disque se soulève.

EXE 23
Soit deux sphères conductrices S et S', de rayon R et R', reliées par un fil conducteur. On porte l'ensemble à un potentiel V.
1) Exprimer le rapport Q/Q' de charges portées par chacune des sphères. En déduire le rapport σ/σ'.
2) En déduire des conséquences pratiques sur un corps chargé et relié au sol et sur les pouvoirs des pointes.
N.B. : *On suppose que le fil est assez long de façon que le potentiel de chaque sphère ne peut être du qu'à l'influence de ses propres charges.*

EXE 24
Une sphère conductrice creuse S, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur $R_2 = 36\ cm$ et de centre O, est placée dans le vide de permittivité relative égale à 1.
L'origine des potentiels est prise à l'infini.
1) La sphère S porte une charge $Q_0 = 2,8\ \mu C$.
a- Déterminer, en tout point de l'espace, le sens et la direction du champ électrique $\vec{E}$ crée par Q_0.
b- Calculer E en fonction de la densité de charges de S et en déduire le potentiel.
c- Retrouver, en fonction de Q_0, le potentiel électrique.
d- Quelle est le potentiel V et la capacité C de la sphère S. Faire l'application numérique et donner V en kV et C en pF.

2) On approche de ***S*** une deuxième sphère, conductrice et chargée, de centre ***O'*** et de rayon ***R'= 18 cm***. La distance ***OO' = d = 72 cm*** ***(d = 2R₂ = 4R')***. ***S*** est maintenue au potentiel *V* et celui de ***S'*** est ***V'***.

a- Calculer, en fonction de R_2, V et V', les expressions littérales de la charge Q de S et de la charge Q' de S'.

b- En déduire l'expression des coefficients, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} et expliquer la signification de chacun de ces coefficients.

On donne : $Q = C_{11}\, V + C_{12}\, V'$

$Q' = C_{21}\, V + C_{22}\, V'$

c- Quelle est l'influence de ***S'*** sur la capacité de ***S***.

d- A.N : Calculer, en microcoulomb, Q, Q' et en picofarad C_{11}, C_{12}, C_{21} et C_{22}.

On donne ***V' = 140 kV***.

3) On admet, maintenant, que les deux surfaces sphériques limitant ***S*** ont même rayon $R_1 = R_2 = 36$ ***cm*** et que, par suite, l'épaisseur de S est négligeable.

On place ***S'*** dans ***S*** de façon que les deux sphères aient le même centre. ***S'*** est maintenue au potentiel ***V'*** et porte la charge ***Q'***. La face interne de ***S*** porte la charge Q_1 et la face externe porte la charge Q_2.

a- Calculer, en fonction de R_2, Q' et V', la charge $Q = Q_1 + Q_2$ et le potentiel V de la sphère *S*. Faire l'application numérique.

b- Quelle est la charge Q_0 que porte ***S*** avant qu'elle ne soit influencée par ***S'***.

EXE 25

On considère un ensemble de charges ***+q***, ***+q***, ***-q***, ***-q*** placées respectivement aux sommets ***A***, ***B***, ***C*** et ***D*** d'un carré de coté ***a*** :

Calculer l'énergie électrostatique du système.

EXE 26

Une charge ***Q*** est uniformément répartie dans le volume d'une sphère isolante de rayon ***R***. Calculer son énergie électrostatique en considérant le travail nécessaire pour créer cette distribution.

EXE 27

Un conducteur sphérique ***s*** de rayon ***r*** est fixe et maintenu au potentiel constant ***v***. Au voisinage se trouve un autre conducteur sphérique ***S*** isolé de rayon ***R*** portant une charge constante ***Q***. Les deux centres des sphères, espacés d'une distance ***L***, restent dans un même plan horizontal.

1) Calculer la charge ***q*** de ***s*** et le potentiel ***V*** de ***S*** en fonction de ***v***, ***Q***, ***r***, ***R*** et ***L***.

2) Calculer la force électrostatique F_e qui existe entre ces deux conducteurs.

3) F_e fait déplacer ***S*** depuis la distance $L = L_0$ jusqu'à l'infini. Calculer le travail W_e fourni par F_e.

4) Calculer l'énergie électrostatique W_i du système formé par les deux conducteurs quand $L = L_0$. En déduire l'énergie du système W_f quand ***L*** tend vers l'infini.

5) Quel est alors le gain en énergie ΔW du système au cours du déplacement.

6) Comparer ΔW et W_e et vérifier alors la conservation de l'énergie.

EXE 28

Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique de rayon intérieur R_1, extérieur R_2 et de hauteur h.
Que devient la capacité quand l'épaisseur du condensateur est négligeable devant ses rayons.

EXE 29

Soit un condensateur plan dont les armatures, séparées par de l'air, ont une surface S et sont écartées à une distance e.
On introduit parallèlement à ces armatures une plaque métallique d'épaisseur d. Que devient la capacité du conducteur considéré.

EXE 30

On charge un condensateur C sous une différence de potentiel V_0. C étant isolé on le relie à un autre condensateur C' initialement neutre. Calculer les charges portées par chaque condensateur ainsi que leurs d.d.p.

Electrocinétique

I. Généralités – Loi d'Ohm.

I.1. Courant électrique.

Chaque fois qu'il y a mouvement d'un grand nombre de charges électriques, on dit qu'il y a courant électrique. La quantité de charge qui traverse une section d'un conducteur par unité de temps est appelée courant électrique : $i = \frac{dq}{dt}$. i s'exprime en Ampère (A).

Si i est constant dans le temps => $Q = i\ t$; soit $i = \frac{Q}{t}$. On le note dans ce cas I. On dit qu'il s'agit d'un régime continu ou permanent ou stationnaire. Toutes les grandeurs sont indépendantes du temps dans ce cas. Par convention le sens positives du courant est celui de déplacement des charges (+).

I.2. Densité de courant.

Soit une portion d'un conducteur de section dS et de longueur dl. Pendant dt, une charge q, ayant une vitesse v, traversera la distance dl.

Nous aurons : $\vec{dl} = \vec{v}\ dt$

Le volume traversé par la charge est alors :

$$d\tau = \vec{dl}\,\vec{dS} = \vec{v}\,\vec{dS}\,dt$$

Si N est le nombre de charges mobiles par unité de volume, $\rho = N.e$ ($e=1.6\ 10^{-19}\ C$) sera la quantité de charges par unité de volume. C'est donc la densité volumique de charge. De plus dans $d\tau$ nous avons la charge :

$$\rho\,d\tau = N\,e\,d\tau = N\,e\,\vec{v}\,\vec{dS}\,dt$$

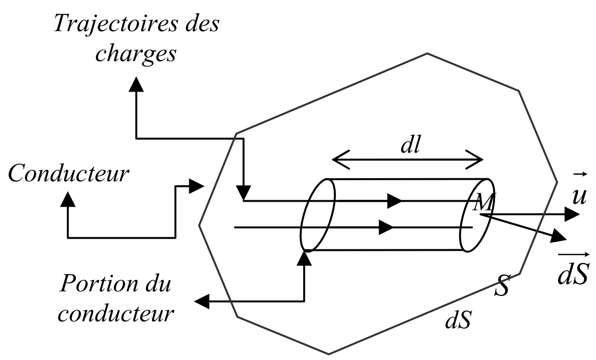
Soit dq cette charge :

$$dq = N\,e\,\vec{v}\,\vec{dS}\,dt$$

$$\frac{dq}{dt} = N\,e\,\vec{v}\,\vec{dS}$$

On pose : $\vec{J} = N\,e\,\vec{v}$

=> $i = \frac{dq}{dt} = \vec{J}\,\vec{dS}$ est le courant qui traverse la section dS. Le courant traversant toute la section S est :



$$\boxed{i = \iint_S \vec{J}\,\vec{dS}} \qquad (5.1)$$

$\vec{J}$ est appelée densité de courant. C'est une grandeur vectorielle, elle s'exprime en $A.m^{-2}$. $\vec{J}$ est colinéaire avec la vitesse des charges mobiles. Les courbes tangentes à $\vec{J}$ sont appelées lignes de courant. Ce sont les trajectoires des charges.

Flux de *J* à travers une surface fermée

Soit Σ une surface fermée dans un conducteur. Supposons que les charges quittent Σ. Pendant dt le nombre de charges qui restent dans Σ diminue ; c'est-à-dire $dq < 0$.

Or $\frac{dq}{dt} = \iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS}$ et $\vec{J}\,\vec{dS} > 0$ => uniquement ici, nous allons ajouter un signe (-) dans l'un des membres de cette équation => $-\frac{dq}{dt} = \iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS}$ = courant qui sort de Σ.

De plus si ρ est la densité de charges mobiles $q = \iiint_V \rho dV$ => $\frac{dq}{dt} = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV$; V est le volume dans Σ. D'où $\iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV$

Or d'après le théorème d'Ostrogradski appliqué à $\vec{J}$ donne : $\iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = -\iiint_V div\vec{J}\,dV$.

On en déduit que $\iiint_V div\vec{J}\,dV = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV$ => $\boxed{div\vec{J} + \frac{d\rho}{dt} = 0}$ (5.2)

La relation (5.2) est valable pour tout fluide qui coule. Si ρ est une constante indépendante de temps : $div\vec{J} = 0$ => $\iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = 0$ => $\vec{J}$ est à flux conservatif.

Conséquence

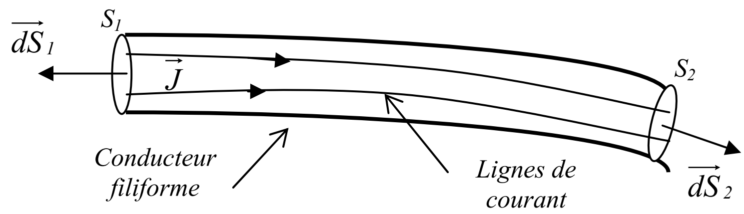
Soit un conducteur filiforme (a la forme d'un fil) et soit $\Sigma = S_1 + S_2 + surface\ latérale$. Nous avons :

$$\iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{J}\,\vec{dS}_2 + \iint_{S_2} \vec{J}\,\vec{dS}_2 + 0 = 0$$

$$\iint_\Sigma \vec{J}\,\vec{dS} = -i_1 + i_2 = 0 \quad =>$$

$i_1 = i_2$

Le courant qui entre dans S_1 est le même que celui qui sort de S_2.



I.3. Loi d'Ohm.

a- Loi d'Ohm locale

Dans un conducteur les charges mobiles sont des électrons. Ces charges sont animées d'une vitesse $\vec{v}$ et donc soumises à une force électrique $\vec{f}_e = e\vec{E}$ et une force de frottement

$\vec{f}_r = -a\vec{v}$ (a : coefficient de frottement) => $\vec{f}_r + \vec{f}_e = m\vec{\gamma}$. A vitesse constante : $\vec{f}_r + \vec{f}_e = \vec{0}$ => $a\vec{v} = e\vec{E}$. On pose $\mu = \dfrac{e}{a}$ => $\vec{v} = \mu\vec{E}$. μ est appelée mobilité des charges. Moins il y a de frottement (a faible) plus les charges sont mobiles (μ grand). Or nous avons vu que $\vec{J} = Ne\vec{v}$ => $\vec{J} = Ne\mu\vec{E}$. On pose $\gamma = Ne\mu$ => $\vec{J} = \gamma\vec{E}$. γ est la conductivité de la substance conductrice. Plus les charges sont mobiles (μ grand) et plus le matériau est conducteur. Pour un conducteur parfait $\gamma = \infty$ et pour un isolant parfait $\gamma = 0$. On préfère utiliser $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$ qui est la résistivité de la substance conductrice. Pour un conducteur parfait $\rho = 0$ et pour un isolant parfait $\rho = \infty$. D'où :

$$\boxed{\vec{E} = \rho\vec{J}} \qquad (5.3)$$

C'est la loi d'ohm locale. On dit aussi la loi d'Ohm microscopique

Conséquence

Régime permanent $div\vec{J} = 0$ => $\gamma\, div\vec{E} = 0$ => $div\vec{E} = 0$. Or d'après la loi de poisson $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ => $\rho = 0$. Pendant un temps donné, Dans un volume du conducteur, ils entrent autant de charges qu'ils en sortent : la variation de la charge totale dans le volume reste nulle.

b- Résistance électrique

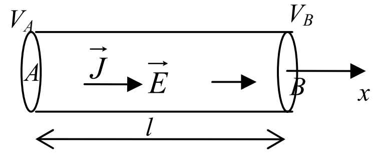
- Définition

Soit un conducteur homogène et filiforme. Supposons $\vec{J}$ uniforme sur une section.

$$I = \iint_{\Sigma} \vec{J}\,\vec{dS} = J\,S \;=>\; J = \frac{I}{S} = \gamma E = -\gamma\frac{dV}{dx} \;=>\; -dV = \frac{1}{\gamma}Jdx = \frac{1}{\gamma}\frac{I}{S}dx$$

Entre A et B, nous aurons ($V_A > V_B$):

$$V_A - V_B = \frac{1}{\gamma}\frac{I}{S}l = \rho\frac{l}{S}I$$

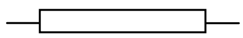


On pose $R_{AB} = \rho\dfrac{l}{S}$ appelée résistance électrique du conducteur entre les points A et B. La résistance ne dépend que de la résistivité (donc de la nature du conducteur) et des dimensions du conducteur.

$$V_A - V_B = R_{AB}I \qquad (5.4)$$

C'est la loi d'Ohm. La résistance s'exprime en Ohm (Ω).

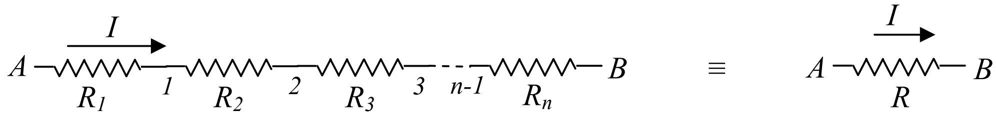
Une résistance est symbolisée par :

 ou 

Remarque importante

*Le passage d'un courant dans une résistance est le siège d'une perte d'énergie par collision et frottement entre les charges mobiles et les atomes fixes du conducteur. Ce phénomène est appelé **effet Joule**.*

- Résistances en série



$V_A - V_1 = R_1 I$, $V_1 - V_2 = R_2 I$, $V_2 - V_3 = R_3 I$, …, $V_{n-1} - V_B = R_n I$. D'une part En faisant la somme membre à membre, nous obtenons : $V_A - V_B = (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n) I$ et d'autre part nous avons : $V_A - V_B = R I$. Dou :

$$R = \sum_{i=1}^{n} Ri \qquad (5.5)$$

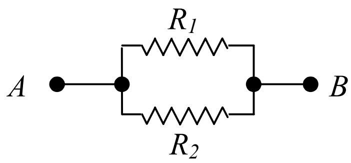
- Résistances en parallèle

D'un coté $V_A - V_B = R_1 I = R_2 I = R_3 I = \ldots = R_n I$ et de l'autre coté $V_A - V_B = R I$. Ici le courant I se divise entre les résistances : $I = I_1 + I_2 + I_3 = \ldots = I_n$

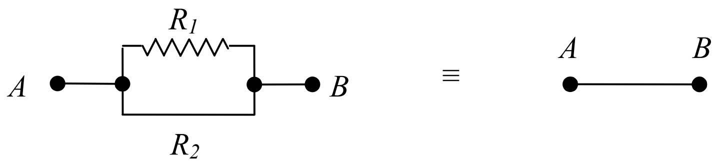
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

- Résistance nulle et résistance infinie

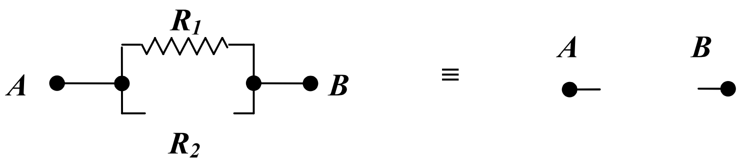
Soient deux résistances R_1 et R_2 en parallèles. La résistance équivalente est $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.



Si $R_2 = 0$ alors $R = 0 \Rightarrow V_A - V_B = R_2 I_2 = 0 \Rightarrow V_A = V_B \Rightarrow$ une résistance nulle est équivalente à un fil. Tous les points d'un fil ont le même potentiel. On dit que R_1 est court – circuitée.



Si $R_2 = \infty \Rightarrow R = R_1 \Rightarrow$ comme si R_2 n'existe pas entre les bornes A et B. Une résistance infinie est un circuit ouvert.



I.4. Loi de Joule.

Un conducteur parcouru par une charge dq entre deux de ses points A et B est le siège d'une énergie $dW = dq\ (V_A - V_B)$ soit $dW = (V_A - V_B)\ I\ dt$ qui est l'énergie du conducteur quand il est parcouru par un courant I pendant dt. Pendant le temps t, nous aurons $W = (V_A - V_B)\ I\ t$ avec I circulant de A vers B. On peut aussi écrire $W = R\ I^2\ t$

Si $V_A > V_B$ alors $W > 0$, on dit que le conducteur est un récepteur.

Si $V_A < V_B$ alors $W < 0$, on dit que le conducteur est un générateur.

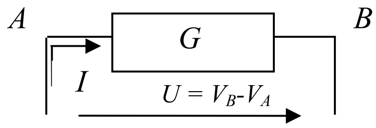
La puissance du conducteur sera : $P = \frac{W}{t} = RI^2 = (V_A - V_B)I$ qui est une grandeur indépendante du temps.

II. Loi d'Ohm généralisée

II.1. Générateur.

$V_A < V_B$

$U = V_B - V_A > 0$

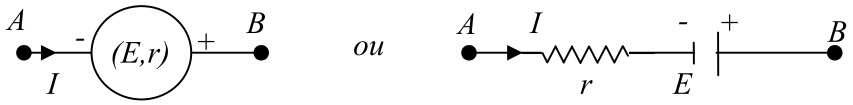


On rappelle que les charges mobiles (+) se déplacent du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé. Malgré que $V_A < V_B$ le courant dans G va de A vers B ce qui est en contradiction avec le sens de déplacement des charges. Le rôle de G est alors de donner suffisamment d'énergie aux charges pour qu'elles remontent le potentiel. On dit que G est un générateur. Un générateur produit de l'énergie. L'énergie produite est la somme de l'énergie perdue par effet Joule et de l'énergie utilisée dans le circuit extérieur. On écrit

$$W = \underbrace{r\ I^2\ t}_{\text{perdue par effet joule}} + \underbrace{(V_B - V_A)\ I\ t}_{\text{utilisée par le circuit extérieur}}$$

$P = r\ I^2 + U\ I = (r\ I + U)\ I = E\ I$ avec $E = r\ I + U$. E est la force électromotrice (*f.e.m.*) du générateur et r est sa résistance interne. C'est la tension aux bornes de G quand $I = 0$. Autrement dit E est la tension que l'on mesure aux bornes du générateur quant il n'est branché à aucun circuit.

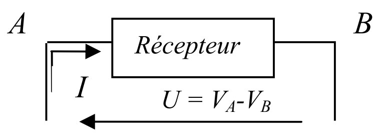
On représente un générateur par :



III.2. Récepteur.

$V_A > V_B$

$U = V_A - V_B > 0$



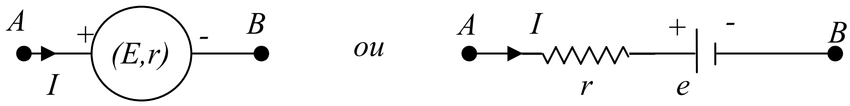
Le courant dans le récepteur va de A vers B ce qui est conforme avec le sens de déplacement des charges. Un récepteur reçoit de l'énergie. L'énergie reçue est la somme de l'énergie perdue par effet Joule dans la résistance

interne r et de l'énergie utilisée pour charger le récepteur. On écrit

$$W = U\,I\,t = \underbrace{r\,I^2\,t}_{perdue\ par\ effet\ joule} + \underbrace{e\,I\,t}_{utilisée\ pour\ charger\ le\ récepteur}$$

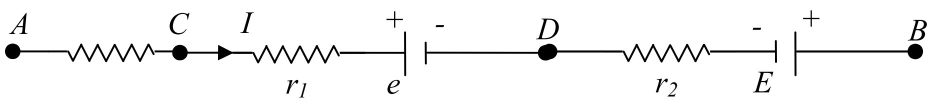
$U = r\,I + e$. e est dite la force contre électromotrice (*f.c.e.m.*) du récepteur et r est sa résistance interne. C'est la tension aux bornes du récepteur quand $I = 0$. Autrement dit e est la tension que l'on mesure aux bornes du récepteur quant il n'est branché à aucun circuit.

On représente un récepteur par :



II.3. Loi d'Ohm généralisée.

Soit une portion *AB* d'un circuit.



- Si *AB* est une résistance :

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = R\,I$

- Si *AB* est un générateur :

$V_A < V_B$ et $V_A - V_B = r\,I - E$

- Si *AB* est un récepteur :

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = r\,I + e$

- Si *AB* est l'ensemble résistance, récepteur et générateur:

$V_A > V_B$ et $V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_D + V_D - V_B = R\,I + r_1\,I + e + r_2\,I - E$

Soit : $V_A - V_B = (R + r_1 + r_2)I - (-e + E)$

Que l'on écrit sous la forme : $V_A - V_B = (R + r_1 + r_2)\,I - (e + E)$ avec $e < 0$.

Ou encore :

$$V_A - V_B = I\,\Sigma R - \Sigma E \tag{5.6}$$

Avec la convention de signe : E est positif pour un générateur et négatif pour un récepteur. L'expression (5.5) est dite loi d'Ohm généralisée. La convention de signe peut être utilisée de la façon suivante : ΣE = somme des *f.e.m.* et *f.c.e.m.* affectées du signe de la borne par où sort le courant.

III. Etude des réseaux

III.1. Définitions.

On appelle :

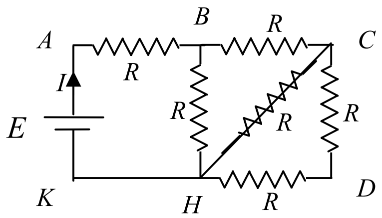
Réseau : Ensemble d'éléments (résistances, générateurs, récepteurs, …) formant un circuit électrique fermé et indépendant.

Nœud : Un point du réseau ou arrivant au moins trois éléments.

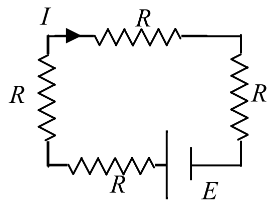
Branche : Toute partie comprise entre deux nœuds.

Maille : Ensemble de branches formant une boucle fermée. Quand toutes les branches sont parcourues par le même courant on dit que la maille est sans dérivation ; dans le cas contraire la maille est avec dérivation.

Exemple :



Circuit 1



Circuit 2

Le circuit 1 contient : $n = 4$ nœuds, $b = 5$ branches, plusieurs mailles avec dérivation et aucune mailles sans dérivation.

Le circuit 2 est un circuit simple, il ne contient aucun nœud. C'est une maille sans dérivation (tout le circuit est parcouru par le même courant).

En régime permanent, le problème est de calculer l'intensité du courant dans chaque branche et la différence de potentiel aux bornes de chaque élément d'un réseau. Pour cela on utilise certaines lois et théorèmes que nous allons étudier dans la suite.

III.2. Loi de Pouillet.

- Cas d'un circuit simple

$V_B - V_A = E - r\,I$

$V_B - V_A = R\,I$

$\Rightarrow E - r\,I = R\,I$

Soit : $E = (R + r)\,I$

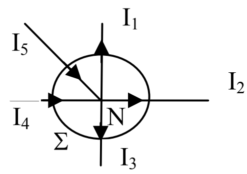
- Cas général

Soit un circuit fermé sans dérivation et comportant plusieurs fem et fcem. La loi d'Ohm généralisée : $V_A - V_B = \Sigma I\,R - \Sigma E$ nous permet d'écrire, quand $V_A = V_B$, $\Sigma E = \Sigma I\,R$. Sachant que tout le circuit est parcouru par le même courant (maille simple sans dérivation), nous aurons :

$$\Sigma E = I\,\Sigma R \qquad (5.6)$$

C'est la loi de Pouillet ; valable pour un circuit simple contenant une seule maille sans dérivation. On doit l'appliquer avec la même convention de signe vue précédemment.

III.3. Lois de Kirchhoff.



a- Première loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi la loi aux nœuds. Soit le nœud N suivant :

Et soit S une surface fermée autour de N. Nous avons vu que le flux de $\vec{J}$ est conservatif =>

$\iint_{\Sigma} \vec{J}\,\vec{dS} = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$

La somme des courant entrant vers le nœud = somme des courants sortant. Soit :

$$\sum I_{entrant} = \sum I_{sortant} \qquad (5.7)$$

Important

Pour un réseau à n nœud, on peut avoir (n-1) équations indépendantes.

b- Deuxième loi de Kirchhoff

On l'appelle aussi la loi aux mailles. On utilise la loi d'Ohm généralisée pour une maille avec dérivation donc des courants différents pour chaque branche : $V_A - V_B = \Sigma I R - \Sigma E$ avec $V_A = V_B$ =>

$$\Sigma E = \Sigma I R \qquad (5.8)$$

On doit appliquer la deuxième loi de Kirchhoff avec la même convention de signe vue précédemment.

Pour un réseau contenant n nœuds et b branches nous aurons $(b-(n-1))$ équations indépendantes.

Ainsi avec les deux lois nous aurons $(n-1) + (b-(n-1)) = b$ équations indépendantes.

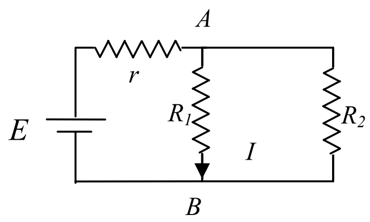
III. 4. Théorème de Thévenin.

Un réseau vu de l'extérieur entre deux de ses bornes A et B est équivalent à un générateur de fem E_{th} et de résistance interne R_{th}.

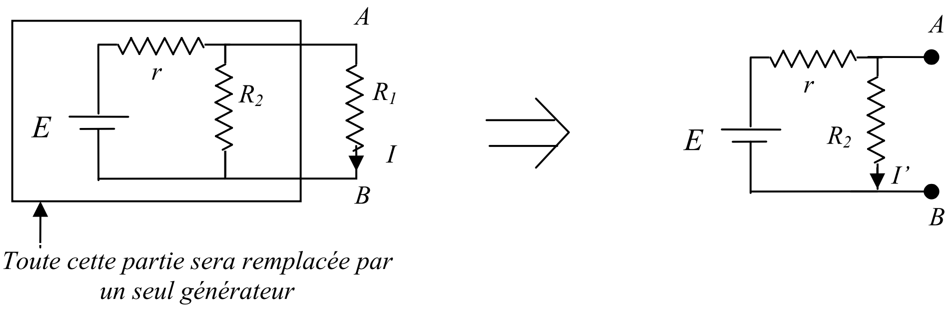
Pour calculer E_{th} et R_{th}, on débranche le circuit extérieur vu entre A et B, E_{th} est alors la d. d. P. entre ces deux points et R_{th} est la résistance équivalente vue toujours entre A et B.

Exemple

On souhaite calculer, à l'aide du théorème de Thévenin, le courant ***I*** de la branche ***AB*** du circuit suivant :

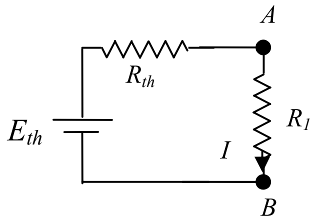


On commence par débrancher la branche parcourue par le courant que l'on veut calculer :



$$E_{th} = V_A - V_B = \frac{R_2 E}{r + R_2} \quad \text{et} \quad R_{th} = r \,//\, R_2 = \frac{rR_2}{r + R_2}$$

Le circuit de départ serait alors équivalent à :



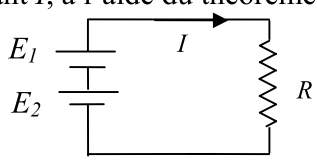
Tout le circuit est alors ramené à un circuit simple avec une seule maille sans dérivation. On utilise la loi de Pouillet : $E_{th} = (R_{th} + R_1)\, I$. Dou : $I = \dfrac{E_{th}}{R_{th} + R_1}$

III.5. Théorème de superposition.

La superposition de plusieurs régimes permanents est un régime permanent.

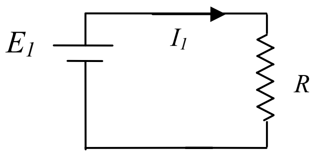
Exemple

Nous allons calculer le courant I, à l'aide du théorème de superposition du circuit suivant :



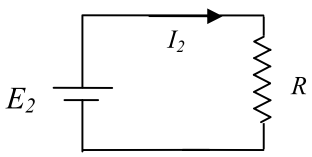
Le courant I est débité par les deux générateurs E_1 et E_2.

1er régime permanent : E_1 seul.



$$I_1 = \frac{E_1}{R}.$$

2ème régime permanent : $\boldsymbol{E_2}$ seul.



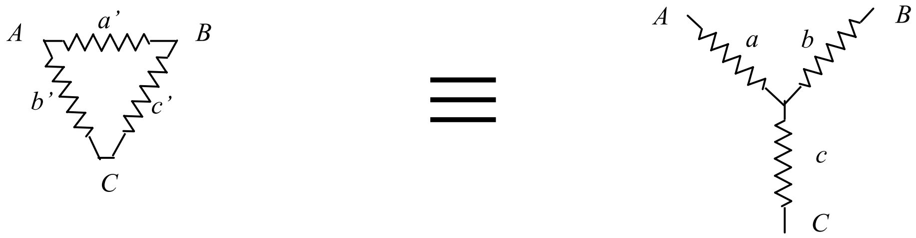
$$I_2 = \frac{E2}{R}$$

Si l'on Superpose les deux régimes, on retrouve le circuit de départ et $\boldsymbol{I = I_1 + I_2}$ =>

$$\boldsymbol{I = \frac{E_1 + E_2}{R}}$$

III.6. Transformation Etoile – Triangle ou de Kenelly.

Dans certains circuits, quelques branches peuvent être groupées sous forme de triangle. Le calcul des courants et parfois de la résistance équivalente est un peu plus compliqué dans ce cas. Alors on utilise une transformation dite de Kenelly. On transforme une configuration triangle en une configuration étoile :



Triangle *Etoile*

On montre que :

$$a = \frac{a'b'}{a'+b'+c'}$$

$$b = \frac{a'c'}{a'+b'+c'}$$

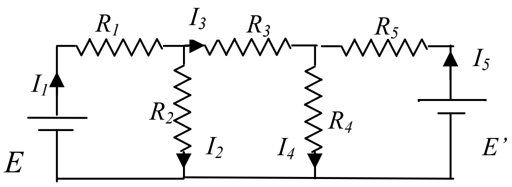
$$c = \frac{b'c'}{a'+b'+c'}$$

III. 7. Méthode des mailles indépendantes.

Nous avons vu à l'aide des lois de Kirchhoff que pour un réseau à (*b*) branches, nous avons (*b*) équations indépendantes à (*b*) inconnues qui sont les courants de chaque branche. Avec la méthode dite méthode des mailles indépendantes, on simplifie presque à moitié le nombre d'inconnues.

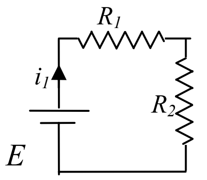
Deux mailles sont dites **indépendantes** si elles n'ont pas de **surface commune**. La méthode consiste à séparer les mailles et à traiter chaque maille comme si elle était seule. Ensuite on applique à chaque maille la loi de Pouillet, un peu modifiée, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant :

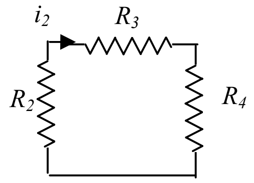
Soit à calculer les courants de chaque branche du réseau :

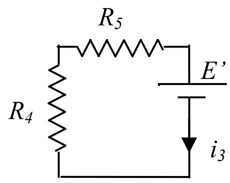


On prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$

Dans ce réseau, il y a trois mailles indépendantes. On les sépare et l'on suppose que chacune d'elles est parcourue par un courant fictif (i_1, i_2 et i_3). Tous les courants fictifs doivent avoir le même sens (choisi au hasard).







On applique la loi de Pouillet modifiée :

1ère maille : $E = (R_1 + R_2)\, i_1 - R_2\, i_2$. Le terme $(-R_2\, i_2)$ est ajouté car dans la deuxième maille, la même résistance est parcourue par i_2 mais dans le sens opposé à celui de i_1.

2ème maille : $0 = (R_2 + R_3 + R_4)\, i_2 - R_2\, i_1 - R_4\, i_3$. Le terme correctif est $(- R_2\, i_1 - R_4\, i_3)$.

3ème maille : $-E' = (R_4 + R_5)\, i_3 - R_4\, i_2$. Le terme correctif est $(- R_4\, i_2)$.

Avec $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$, nous avons le système d'équations :

$$\begin{cases} 2Ri_1 - Ri_2 + 0i_3 = E \\ Ri_1 - 3Ri_2 + Ri_3 = 0 \\ 0i_1 + Ri_2 - 2Ri_3 = E' \end{cases}$$

Si l'on utilise par exemple la méthode des déterminants pour trouver les solutions, nous aurons : $\Delta = 8R^3$, $\Delta_{i_1} = 5R^2E - R^2E'$, $\Delta_{i_2} = 2R^2E - 2R^2E'$, $\Delta_{i_3} = R^2E - 5R^2E'$

D'où : $i_1 = \dfrac{5E - E'}{8R}$; $i_2 = \dfrac{2E - 2E'}{8R}$; $i_3 = \dfrac{E - 5E'}{8R}$

Pour trouver les courants réels, il suffit de comparer le circuit d'origine et les mailles indépendantes. En effet on remarque que la branche contenant R_1 est parcouru par I_1 d'un coté et par i_1 de l'autre coté. Les deux courants sont dans le même sens. Donc $I_1 = i_1$. De même $I_3 = i_2$. Par contre $I_5 = -i_3$ car ces deux courants sont dans des sens opposés. La résistance R_2 est parcourue par i_1 dans la première maille et par i_2 dans la deuxième. En respectant les sens, on a donc : $I_2 = i_1 - i_2$. De même pour la résistance R_4 : $I_4 = i_2 - i_3$. En tout nous avons :

$$I_1 = i_1 = \frac{5E - E'}{8R}$$

$$I_2 = i_1 - i_2 = \frac{3E + E'}{8R}$$

$$I_3 = i_2 = \frac{2E - 2E'}{8R}$$

$$I_4 = i_2 - i_3 = \frac{E + 3E'}{8R}$$

$$I_5 = -i3 = \frac{-E + 5E'}{8R}$$

Exercices d'Electrocinétique

Pour bien assimiler cette partie du programme, l'étudiant aura besoin de connaître :

❖ les définitions d'une résistance infinie et d'une résistance nulle ainsi que celle de la résistance équivalente, de la capacité équivalente, du générateur équivalent et du récepteur équivalent.

❖Les différentes lois de l'électrocinétique

❖Les différents théorèmes de l'électrocinétique

EXE 1

Considérons le circuit de la figure 2 où I_1 et I_2 sont les courants continus débités par les générateurs de f.e.m. E_1 et E_2 respectivement.

1) Déterminer I, à l'aide du théorème de Thévenin.
2) Retrouver, à l'aide des lois de Kirchhoff, le courant I.
3) A.N : Calculer I si $R = 1\ M\Omega$, $E_1 = 2/3$ V et $E_2 = 15/2$ V
4) Montrer que le courant qui traverse la résistance R' du circuit de la figure 3 est aussi égale à I.

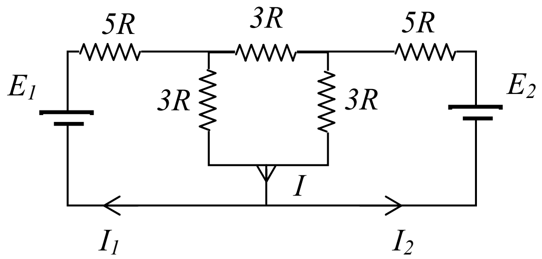


Figure 2

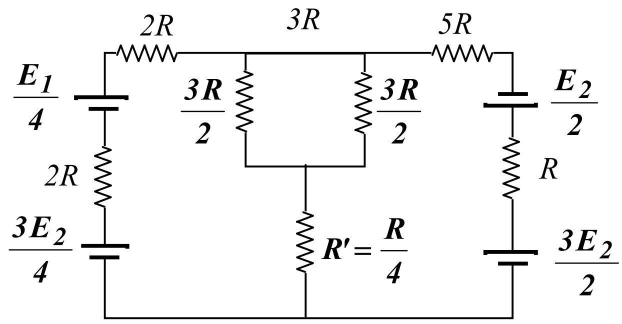


Figure 3

EXE 2

Considérons le circuit de la figure 4 où X est une résistance variable et $E > 0$.

1) Déterminer, à l'aide du théorème de thévenin, le courant I qui traverse la résistance R.
2) Quelle condition doive vérifier la résistance X pour que :
a- I soit nul.
b- I soit dirigé de A vers B.
c- I soit dirigé de B vers A.

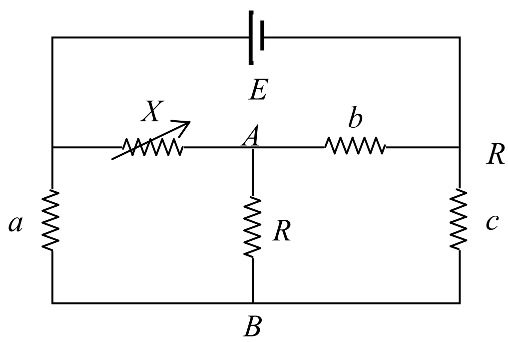


Figure 4

EXE 3

1- Déterminer, par la méthode de votre choix, le courant I débité par le générateur E du circuit de la figure 5.

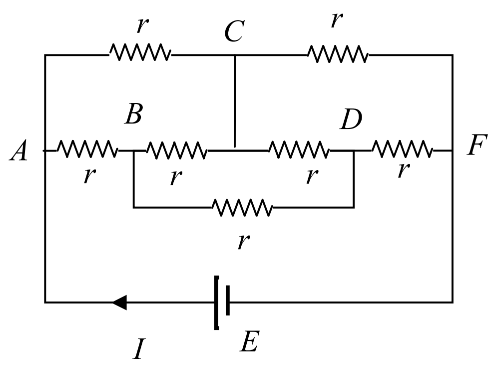


Figure 5

2- Faire l'application numérique si $E = 8\ V$ *et* $r = 7\ k\Omega$.

EXE 4

Calculer le courant de chaque branche du circuit de la figure 6, sachant que le courant qui traverse la résistance de $8\ k\Omega$ est nul.

Retrouver, en utilisant la méthode des mailles indépendantes, le courant de chaque branche du circuit.

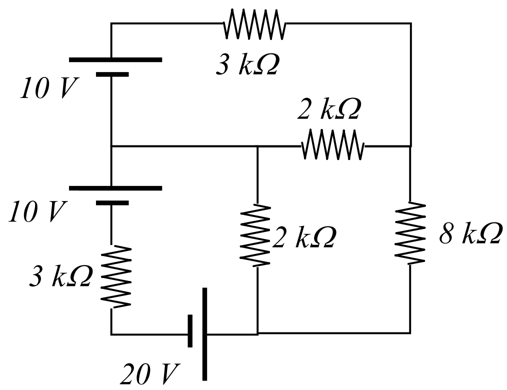


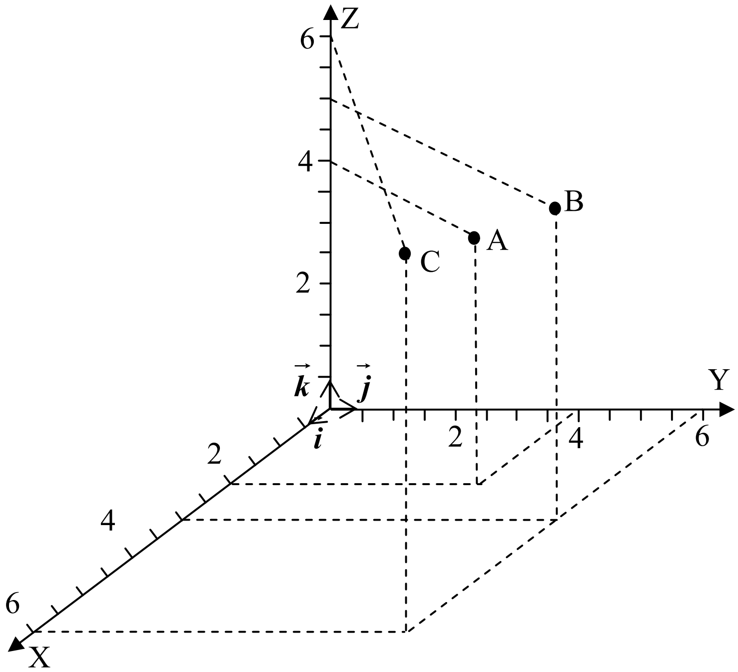
Figure 6

Solution des exercices et problèmes

Rappels Mathématiques

EXE 1

a- Représentation dans le système de coordonnées cartésien des points ***A***, ***B*** et ***C***.



b- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 5\vec{k} - (2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k} - (2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Soit $\overrightarrow{AB} : \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 1 \end{cases} \quad \overrightarrow{AC} : \begin{cases} 4 \\ 2 \\ 2 \end{cases}$

c- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 + 4 + 2 = 10$.

d- Calculer les modules de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

$AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $AC = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$

e- Comme $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.BC.cos(BAC)$, on en déduit que :

$$cos(BAC) = \frac{10}{12} = 0{,}59\, rd = 33°56'$$

EXE 2

a- Le gradient des fonctions : ***r***, ***1/r*** et ***ln r***.

$$\overrightarrow{grad r} = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} \quad \text{avec } r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

Tout calcul fait, nous aurons : $\overrightarrow{grad} r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = \frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(1/r\right)}{\partial z}\vec{k}$$

Tout calcul fait, nous aurons : $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = \frac{-x}{r^3}\vec{i} + \frac{-y}{r^3}\vec{j} + \frac{z}{r^3}\vec{k} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\overrightarrow{grad}\, ln\, r = \frac{\partial\, ln\, r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\, ln\, r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\, ln\, r}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial r/\partial x}{x}\vec{i} + \frac{\partial r/\partial y}{y}\vec{j} + \frac{\partial r/\partial z}{z}\vec{k}$$

Tout calcul fait, nous aurons : $\overrightarrow{grad}\, ln\, r = \frac{1}{r}\vec{i} + \frac{1}{r}\vec{j} + \frac{1}{r}\vec{k}$

b- La divergence des vecteurs : $\vec{r}$ et $\frac{\vec{r}}{r^3}$

Puisque les composantes de $\vec{r}$ sont x, y et z, alors

$$div\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 3$$

$$div\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial\left(x/r^3\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x/r^3\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x/r^3\right)}{\partial x} = \frac{r^3 - 3xr^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{r^6} + \frac{r^3 - 3yr^2\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)}{r^6} + \frac{r^3 - 3zr^2\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)}{r^6}$$

$$= \frac{r^3 - 3xr^2\frac{x}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - 3xr^2\frac{y}{r}}{r^6} + \frac{r^3 - 3xr^2\frac{z}{r}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$= \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$$

Remarque : on a vu que $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, donc $div\frac{\vec{r}}{r^3} = div\left(-\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}\right) = -div\,\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = 0$,

puisque quelque soit la fonction scalaire f $div\,\overrightarrow{grad} f = 0$

c- le rotationnel des vecteurs : $\vec{r}$, $\frac{\vec{r}}{r^2}$ et $\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{rot}\frac{\vec r}{r^2}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\left(\frac{z}{r^2}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{y}{r^2}\right)}{\partial z}\right)\vec i+\left(\frac{\partial\left(\frac{x}{r^2}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{z}{r^2}\right)}{\partial x}\right)\vec j+\left(\frac{\partial\left(\frac{y}{r^2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{x}{r^2}\right)}{\partial y}\right)\vec k$$

$$=\left(-2z\frac{y}{r^4}+2y\frac{z}{r^4}\right)\vec i+\left(-2x\frac{z}{r^4}+2z\frac{x}{r^4}\right)\vec j+\left(-2y\frac{x}{r^4}+2x\frac{y}{r^4}\right)\vec k$$

$$=\vec 0$$

Remarque : puisque $\overrightarrow{rot}\frac{\vec r}{r^2}=\vec 0$ et puisque $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f=\vec 0$, alors $\frac{\vec r}{r^2}$ est un gradient. On dit que $\frac{\vec r}{r^2}$ dérive d'un potentiel scalaire (ici f).

$$\overrightarrow{rot}\frac{\vec r}{r^3}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{y}{r^3}\right)}{\partial z}\right)\vec i+\left(\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial x}\right)\vec j+\left(\frac{\partial\left(\frac{y}{r^3}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial y}\right)\vec k$$

$$=\left(-3z\frac{y}{r^5}+3y\frac{z}{r^5}\right)\vec i+\left(-3x\frac{z}{r^5}+3z\frac{x}{r^5}\right)\vec j+\left(-3y\frac{x}{r^5}+3x\frac{y}{r^5}\right)\vec k$$

$$=\vec 0$$

Résultat attendu puisque l'on a vu que $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}=-\frac{\vec r}{r^3}$. $\frac{\vec r}{r^3}$ dérive donc du potentiel $-\frac{1}{r}$. Son rotationnel est alors nul.

d- Le Lapacien Δr.

$$\Delta r=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{\partial\frac{x}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{x}{r}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{x}{r}}{\partial x}=\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}+\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}+\frac{r-x\frac{x}{r}}{r^2}$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}+\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}=\frac{2}{r}$$

EXE 3

Soit le champ de vecteurs $\vec V(M)$ dont les composantes au point M sont :

$V_x(x, y, z)$, $V_y(x, y, z)$, $V_z(x, y, z)$.

Calculer sa divergence et son rotationnel si.

a- $V_x = 2x - y$ $\quad$ $V_y = -x + 2y$ $\quad$ $V_z = -4z$

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (-1+1)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (-1+1)\vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{V}$ est un gradient, Il dérive donc d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ que l'on doit chercher. On écrit :

$\vec{V} = \overrightarrow{gradf} \iff V_x = \frac{\partial f}{\partial x}, V_y = \frac{\partial f}{\partial y}, V_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Soit : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -4z$

La première équation nous donne : $f(x,y,z) = x^2 - yx + C_1(y,z)$ où $C_1(y,z)$ est une constante indépendante de x.
Si l'on dérive cette dernière expression par rapport à la variable y, nous aurons :

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + \frac{\partial C_1}{\partial y}$ que l'on compare à la deuxième équation. Nous avons alors :

$\frac{\partial C_1}{\partial y} = 2y$. Soit : $C_1(y,z) = y^2 + C_2(z)$ où $C_2(z)$ est une constante indépendante de x et de y.

$f(x,y,z)$ prend alors la forme : $f(x,y,z) = x^2 - yx + y^2 + C_2(z)$ que l'on dérive de nouveau mais cette fois par rapport à z.

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial C_2}{\partial z}$ que l'on compare à la troisième équation : $\frac{\partial C_2}{\partial z} = -4z$. Soit : $C_2 = -2z^2 + cte$

En définitif la fonction scalaire aurait pour expression :

$$f(x,y,z) = x^2 - yx + y^2 - 2z^2 + cte$$

b- $V_x = 2y + 3z$ $V_y = -2x$ $V_z = 3x$

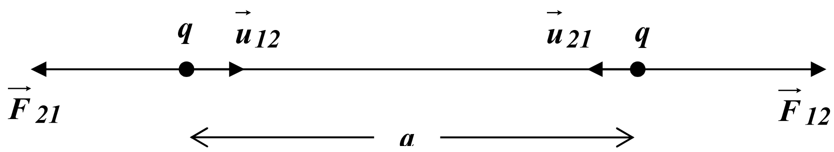
$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (0+0)\vec{i} + (3-3)\vec{j} + (-2-2)\vec{k} = -4\vec{k}$$

Electrostatique

I- Calcul direct de champs électrostatiques

EXE 1



$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{12}$ Et $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_{21}$

Noter l'emplacement de l'origine des vecteurs unitaires et l'ordre des indices.

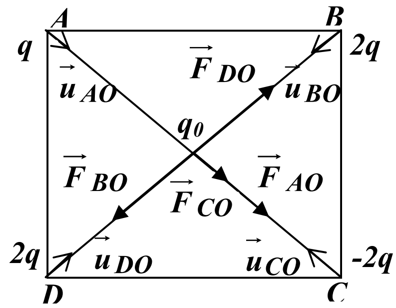
Loi de Coulomb : $F = F_{12} = F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$

On rapproche les charges à une distance b pour que la nouvelle force F_N devienne égale au double de F. $2F = F_N \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{b^2}$

Soit : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{b^2} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$ => $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$

EXE 2

La résultante des forces exercées sur q_0 est :



$\vec{F} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BO} + \vec{F}_{CO} + \vec{F}_{DO} = \vec{F}_{AO} + \vec{F}_{CO}$

Soit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{2a^2}\vec{u}_{AO} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2qq_0}{2a^2}\vec{u}_{CO}$$

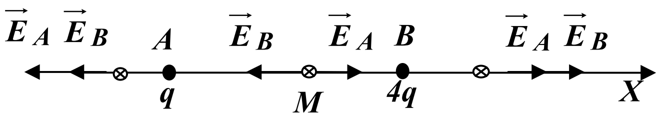
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{2a^2}\vec{u}_{AO} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq_0}{2a^2}\vec{u}_{AO}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq_0}{2a^2}\vec{u}_{AO}$$

La résultante a le sens et la direction de $\vec{u}_{AB}$ et son module est donnée par l'expression :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qq_0}{2a^2}$$

EXE 3



On distingue trois zones :

- A gauche de A où les deux champs ne peuvent que s'ajouter
- A droite de A où les champs ne peuvent que s'ajouter
- Entre AB où les deux champs sont opposés et donc peuvent s'annuler mutuellement si leurs modules sont égaux. Dans ce cas, la résultante des champs sera nulle si :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{(a-x)^2}$$. Avec $x = AM$

Soit : $(a-x)^2 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2ax - a^2 = 0$

$$\Delta = 4a^2 \Rightarrow x = \frac{-a \pm 2a}{3} = \begin{cases} a/3 \\ -a \end{cases}$$

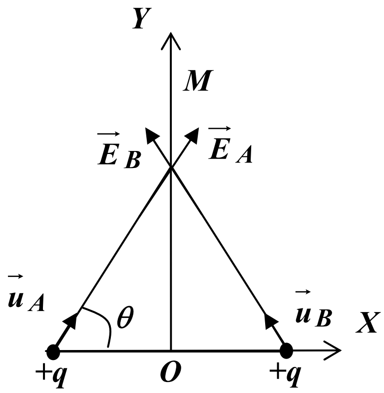
La solution $x = -a$ n'est pas réelle, car on sort de la zone entre A et B, il reste la solution $x = a/3$.

EXE 4

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\left(\vec{u}_A + \vec{u}_B\right)$$

La somme vectorielle des vecteurs unitaires est un vecteur appartenant à l'axe OY, donc le champ total est porté par OY.

Projection sur OY :



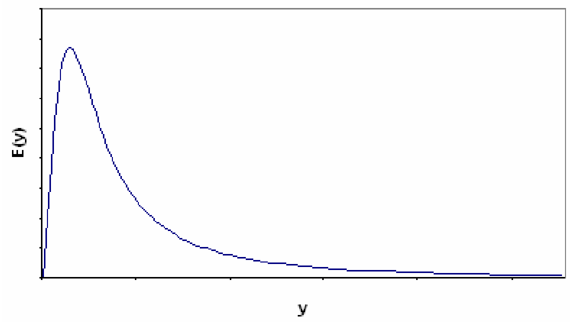
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\,2\sin\theta$$. Soit : $$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Et donc $$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

$$E' = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\left(a^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2-2y^2\right)}{\left(a^2+y^2\right)^3},$$

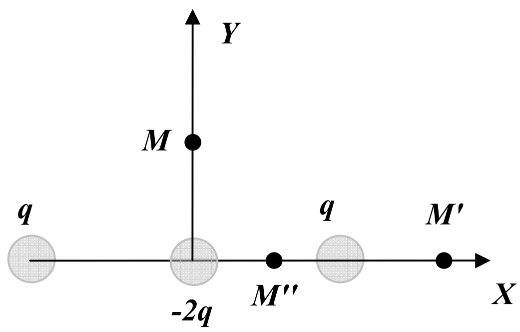
La dérivée de E a le signe de $\left(a^2-2y^2\right)$, le reste de l'expression est toujours positif. Donc $E' \geq 0$ si y est comprise entre $-\frac{a}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ et il est négatif à l'extérieur de ces racines. Comme le problème est limité aux $y \geq 0$ nous avons :

y	0	$a/\sqrt{2}$	$+\infty$
$E'(y)$	+ + +	- - -	
$E(y)$	0 ↗	$E = \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$ ↘	0



Le champ passe par un extremum correspondant à l'abscisse $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Il s'annule à l'infini et au centre ***O***. Il reste constamment continu. Bien entendu au point ***M*** il n'y a pas de charge donc il n'y a pas de force électrique.

EXE 5



En ***M*** (sur ***OY***), le champ $\vec{E}$ est la résultante des champs créés par les trois charges. Le champ créé par les deux charges ***q*** est portés par ***OY*** et il a pour expression $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}2\sin\theta\,\vec{j}$ (voir exercice 4). A ce champ s'ajoute celui créé par la charge ***-2q*** et ayant comme expression $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2q}{y^2}\vec{j}$.

La résultante est :

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}2\sin\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{y^2}\right)\vec{j}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2}\right)\vec{j}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y^3-\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y^2\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\vec{j}$$

En ***M'*** ($x > a$), la résultante est : $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_q + \vec{E}_{-2q}$. Soit :

$$\vec{E} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x+a)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(x-a)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{x^2}\right)\vec{i}$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a^2\left(3x^2-a^2\right)}{x^2\left(x^2-a^2\right)^2}\right)\vec{i}$$

En M'' ($0 < x < a$), la résultante est :

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_q + \vec{E}_{-2q}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(x+a)^2} + \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(x-a)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-2q}{x^2} \right) \vec{i}$$

$$= -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2ax^3 + \left(a^2 - x^2\right)^2}{x^2\left(x^2 - a^2\right)^2} \right) \vec{i}$$

Soit $$\vec{E} = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2ax^3 + \left(a^2 - x^2\right)^2}{x^2\left(x^2 - a^2\right)^2} \right) \vec{i}$$

EXE 6

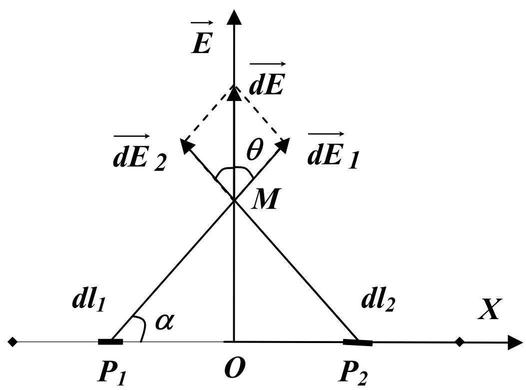
1- dl_1 crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE_1}$ faisant θ avec la verticale, dl_2 symétrique à dl_1 par rapport à OY crée au point M le champ $\overrightarrow{dE_2}$ symétrique aussi à $\overrightarrow{dE_1}$. Le champ résultant $\overrightarrow{dE}$ est donc porté par OY. En considérant, de cette façon, deux à deux tous les éléments symétriques, nous obtenons un champ $\vec{E}$ total porté par OY.

2- Le champ élémentaire résultant est : $\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{r^2} \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \right)$

Où $dl = dl_1 = dl_2$

Projection sur OY : $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{r^2} 2 \sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dl}{r^2} 2 \cos\theta$

Avec $\cos\theta = \frac{y}{r}$, $tg\theta = \frac{l}{y}$ et donc $\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dl}{y}$, nous aurons :



$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y d\theta}{\cos^2\theta} \frac{\cos^2\theta}{y^2} 2\cos\theta$$

Soit après simplification $dE = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \cos\theta \; d\theta$.

Le champ total sera après intégration :

$$E = \int_0^{\theta_1} \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \cos\theta \; d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \sin\theta_1$$. Avec

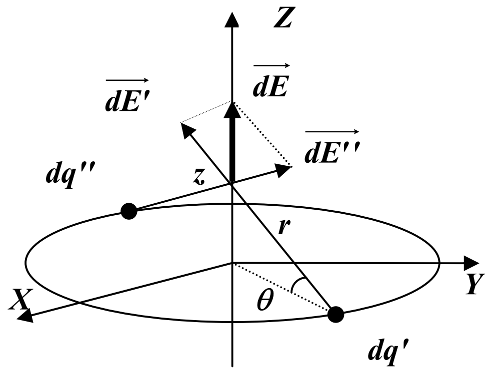
$$\sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la longueur chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où $$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{y\sqrt{y^2+a^2}}$$

3- Si a devient infinie, alors $E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y}$. C'est le champ, au point M, crée par un fil infini portant une distribution linéique de charge.

EXE 7



La charge dq' crée : $\overrightarrow{dE'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u'}$, la charge dq'' symétrique à dq' par rapport à OZ crée $\overrightarrow{dE''} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u''}$ symétrique à $\overrightarrow{dE'}$.

$dq' = dq''$ donc $dE' = dE''$.

Le champ résultant selon l'exercice 4 est :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE'} + \overrightarrow{dE''} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{r^2}\left(\vec{u'} + \overrightarrow{u''}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq'}{r^2}2\sin\theta\vec{k}$$

$$E = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}2\sin\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{zdl}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_l dl = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}2\pi R$$

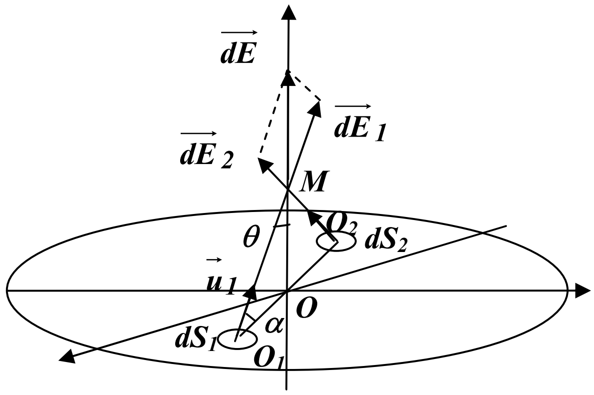
Donc $E(z) = \frac{\lambda R}{\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

EXE 8

1- dS_1 contient dq_1 et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{O_1M^2}\vec{u}_1$ faisant l'angle θ avec OZ.

dS_2 symétrique à dS_1 contient $dq_2 = dq_1$ et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_2}{O_2M^2}\vec{u}_2$ faisant le même angle θ avec OZ.

Si l'on note $dq = dq_1 = dq_2$ et sachant que $O_1M = O_2M$, alors le champ résultant sera forcement porté par OZ :



$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_1 + \overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right)$$

Où $\rho = O_1O = O_2O$.

<u>Projection sur OZ</u> :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\sin\alpha$$

Où $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\cos\theta$.

Avec $dq = \sigma dS$, $\cos\theta = \frac{z}{O_1M}$, $tg\theta = \frac{\rho}{z}$ et donc $\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d\rho}{z}$, nous aurons :

$dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{\frac{z^2}{\cos^2\theta}}2\cos\theta$. En coordonnées cylindrique $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$. Le champ total sera :

$$dE = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\rho\, d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,tg\theta\frac{z\,d\theta}{\cos^2\theta}d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Si l'on intègre :

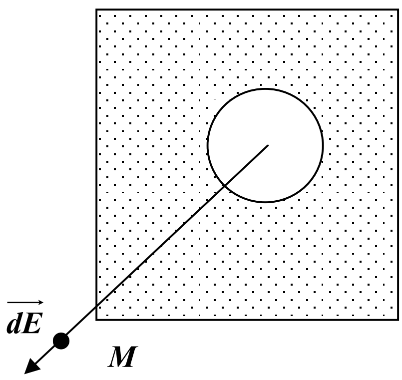
$E = \int_0^{\theta_0}\frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\pi}d\varphi = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\cos\theta_0\right)\pi$. Avec $\cos\theta_0 = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

L'intégrale porte sur la moitié de la surface chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où $$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

2- $Z \Rightarrow +\infty$, $E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ est le champ crée par un plan chargé en surface.

EXE 9



Le système peut être considéré comme la superposition d'un plan est d'un disque. Le champ sera porté par la droite ***OM*** et on peut le calculer en considérant qu'il est la superposition du champ crée par un plan chargé en surface auquel on retranche le champ crée par un disque chargé en surface aussi. D'après l'exercice 8, nous aurons :

si $z > 0$ $$E_{disque} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right)$$

et $$E_{plan} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

si $z < 0$ $$E_{disque} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right)$$

et $$E_{plan} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Donc le champ crée par notre système est :

si $z > 0$ $$E = E_{plan} - E_{disque} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

si $z < 0$ $$E = E_{plan} - E_{disque} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-2 + \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right)$$

II- Théorème de GAUSS

EXE 10

1/ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$ est le champ électrostatique crée par q en tout point M de la surface de la sphère. Par définition le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère est $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S \vec{E}\,\vec{dS}$. Or $\vec{E}$ et $\vec{dS}$ sont parallèles. Le flux devient : $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S EdS$. Comme E ne dépend que de R et que tous les points de S sont à la même distance R de O, le module du champ est uniforme :

$$\Phi\left(\vec{E}/S\right) = E\iint_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2- Le cylindre est composé d'une surface latérale S_L et de deux surfaces de bases S_{B1} et S_{B2}.
Le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre est

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E}\vec{dS} = \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS}.$$

$$= \iint_{Sl} E_L dS_L \cos\theta_L + \iint_{SB1} E_{B1} dS_{SB1} \cos\theta_1 + \iint_{SB2} E_{B2} dS_{B2} \cos\theta_2$$

Avec $E_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_L^2}$, $E_{B1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2}$ et $E_{B2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}$.

Si Ω_L, Ω_1 et Ω_2 sont les angles solides sous lesquels on observe du point O respectivement les surfaces S_L, S_{B1} et S_{B2} alors l'expression du flux devient :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\iint_{SL}\frac{dS_L \cos\theta_L}{r_L^2} + \iint_{SB1}\frac{dS_{B1}\cos\theta_1}{r_1^2} + \iint_{Sl}\frac{dS_{B2}\cos\theta_2}{r_2^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_L + \Omega_{B1} + \Omega_{B2})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

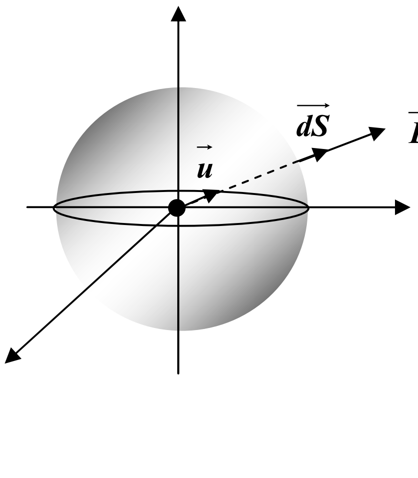
Où $\Omega = 4\pi$ est l'angle solide sous lequel on observe tout l'espace.

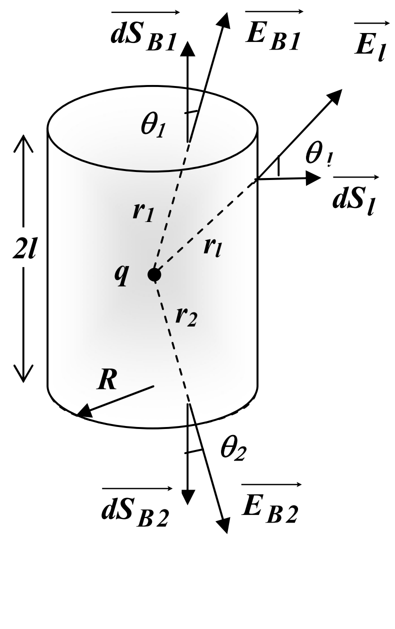
On retrouve $\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{\varepsilon_0}$

De même pour deux plans on retrouve le même rapport q/ε_0 car l'angle solide sous lequel on voit un plan est 2π **Srd** et donc l'angle solide sous lequel on voit deux plans est 4π **Srd** (espace).

Remarque : - les surfaces étudiées sont toutes fermées. Deux plans parallèles et espacés sont considérés comme une surface fermée.

Conclusion : Le flux du champ électrique crée par une charge à travers une surface fermée contenant la charge est toujours égal au rapport q/ε_0 : C'est le théorème de Gauss.





EXE 11

1- $\vec{E} = x^2\vec{i}$ possède une seule composante. Le champ sera donc perpendiculaire à tous les vecteurs de surface (flux nul) sauf ceux des faces parallèles au plan OZ. Le flux total est alors :

$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_{S1} x^2\,\vec{i}\,\overrightarrow{dS_1} + \iint_{S2} x^2\,\vec{i}\,\overrightarrow{dS_2}$ Or sur le plan appartement à ***OYZ*** (***S_1***), $x = 0$ et sur le plan parallèle à celui-ci (***S_2***) $x = a$ d'où :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_{S2} a^2\,dS_2 + 0 = a^2a^2 = a^4$$

2- La surface étant fermée, $\Phi(\vec{E}/S) = a^4 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ soit $q = a^4\varepsilon_0$

3- On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Ce qui nous emmène à : $\dfrac{dx^2}{dx} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\rho = 2\varepsilon_0 x$. La densité n'est pas uniforme mais varie linéairement avec ***x***. C'est-à-dire que l'on a des plans "équicharges" tous parallèles à ***OYZ***. Sur le plan ***OYZ*** ($x = 0$) il y a absence de charges. Plus on s'éloigne plus la quantité de charges augmente. La charge contenue dans le cube est la somme de toutes ces charges. Soit dans le cube un volume élémentaire ***dV*** contenant la charge ***dq***. On peut écrire : $dq = \rho dV$. La charge du cube serait : $q = \int_{\text{volume du cube}} \rho dV = \iiint_{\text{volume du cube}} 2\varepsilon_0 x\,dx\,dy\,dz = 2\varepsilon_0 \int_0^a x\,dx \int_0^a dy \int_0^a dz$

Et on retrouve $q = a^4\varepsilon_0$

EXE 12

1- En un point ***M*** de l'espace le champ est radial et il est constant sur tous les points ayant la même distance ***r*** de ***O***. $\iint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\,dv$ ***S*** étant la surface de Gauss et ***v*** le volume chargé inclus dans ***S***.

► Si $r > R_2$, $E4\pi r^2 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi\left(R^3{}_2 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \dfrac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{gradV} \iff V = -\int E dr = \dfrac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$, la constante d'intégration est nulle car $V(\infty) = 0$

► Si $R_2 > r > R_1$, $E4\pi r^2 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{\left(r^3 - R^3{}_1\right)}{r^2}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longleftrightarrow V = -\int E dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + C_1$$

► Si $r < R_1$, absence de charge dans la surface fermée, $E = 0$. $V = C_2$.

Détermination de C_1 et C_2

Quand M est à la distance R_1 de O : $\lim_{r \to R_1^+} V(r) = \lim_{r \to R_1^-} V(r)$. Soit $C_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1}\right) + C_1$

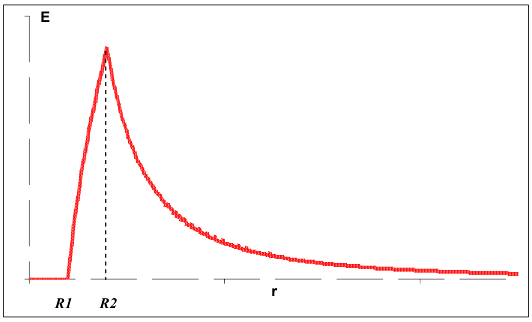
A la distance R_2 de O : $\lim_{r \to R_2^+} V(r) = \lim_{r \to R_2^-} V(r)$. Soit $-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right) + C_1 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$

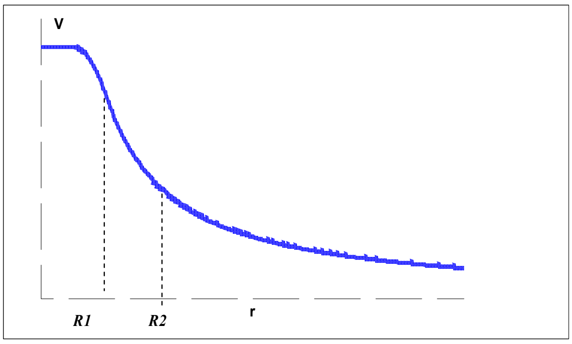
$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_2^2$ et donc $C_2 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

On regroupe les résultats dans le tableau :

$r > R_2$	$E = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
$R_2 > r > R_1$	$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - R_1^3\right)}{r^2}$	$V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r}\right)$
$r < R_1$	$E = 0$	$V = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

2-





Le champ et le potentiel sont des fonctions continues à la traversée d'un <u>volume</u> chargé.
N.B : *Le champ n'est discontinu qu'au passage à travers une surface mince chargée.*

3- Si R_1 tend vers R_2, on obtient une seule sphère chargée en surface de distribution : $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$

Deux cas uniquement sont possibles $r < R$ et $r > R$. On peut rappliquer le théorème de Gauss ou directement remplacer ρ par son expression en fonction de la charge.

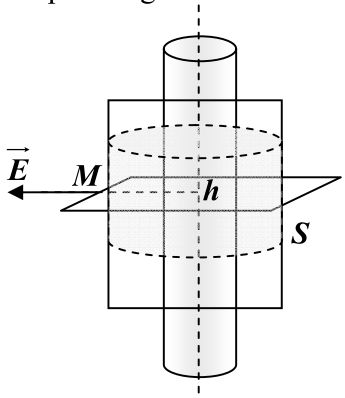
$r > R$	$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

EXE 13

Le cylindre infini contient deux plans de symétrie passant par ***hM***. Le champ électrique s'il existe est donc porté par ***hM***.

Le champ ne dépend que de la distance entre ***M*** et les charges.

L'ensemble des points M tel que la distance ***hM*** reste constante est un cylindre d'axe ***ZZ'*** et de rayon ***r = hM***. La surface de Gauss ***S*** sera alors ce cylindre qu'il faut fermer par deux surfaces de base. La hauteur de ***S*** est finie que l'on prend égale à ***L***.



$$\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_\Sigma \sigma\, d\Sigma$$

Σ étant la surface chargée, du cylindre infini, contenue dans la surface de Gauss.

$$E\,2\pi r L = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}2\pi RL \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

N. B : *Le flux du champ à travers les deux surfaces de base est nul car le champ est perpendiculaire à l'élément de surface.*

EXE 14

Théorème de Gauss : $\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\, dv$ où ***S*** est la sphère de Gauss de centre ***O*** et de rayon ***r'***. ***v*** est le volume chargé contenu dans ***S***.

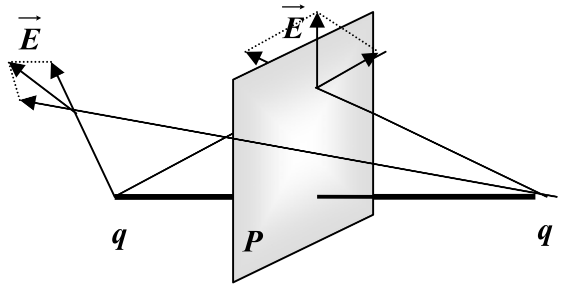
1- $E\,4\pi r'^2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\iiint_v r\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^4}{4}2\,2\pi\frac{1}{r'^2} = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

2- $E 4\pi r'^2 = \frac{b}{\varepsilon_0} \iiint_v \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{b}{\varepsilon_0} \int_0^R r \, dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$E = \frac{b}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^3}{3} 2 \, 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{bR^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2}$

EXE 15



On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

1- $div\vec{E}_1 = 2ay - 2ay \Rightarrow \rho = 0$. Absence de charges à l'endroit où règne le champ.

2- $div\vec{E}_2 = -2a - 2a - 2b = -4a - 2b \Rightarrow \rho = -2\varepsilon_0(4a + b)$. ρ est uniforme.

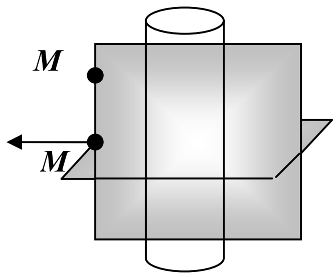
3- $div\vec{E}_3 = 0 \Rightarrow \rho = 0$. Absence de charges à l'endroit où règne le champ.

EXE 16

- Cas d'un segment :

Si $M \in$ au plan de symétrie P, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M.

- De même pour un cylindre fini.



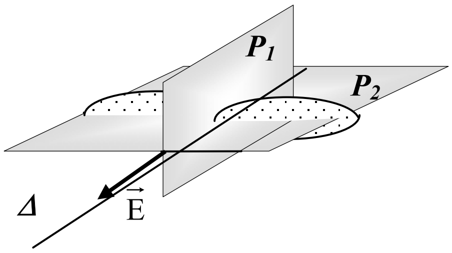
Si $M \in$ au plan de symétrie, $\vec{E}$ est porté par ce plan. Mais sa direction exacte ne peut pas être déterminée. Si $M \notin$ au plan de symétrie, la direction de $\vec{E}$ change selon la position de M. Par contre quand M appartient à deux plans de symétrie, le champ est porté par la droite intersection.

- Cas d'une distribution quelconque présentant deux plans de symétrie.

Si $M \in P_1$, $\vec{E}$ est dans P_1.

Si $M \in P_2$, $\vec{E}$ est dans P_2.

Si $M \in \Delta = P_1 \cap P_2$, $\vec{E}$ est porté par $\Delta \Rightarrow \Delta$ est une ligne de force.



III- Calcul indirect du champ électrostatique

EXE 18

Une charge ponctuelle ***dq*** contenue dans ***dS*** crée au point ***O*** un potentiel élémentaire :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{R}$$

Le potentiel crée par l'ensemble des charges de ***S*** est alors

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\, dS}{R}$$

1- $\sigma = \sigma_0$:

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R} S = \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$$

2- $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$:

$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\cos\theta\, dS}{R}$. En coordonnées sphériques $dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

$$V = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S R\cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{\sigma_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Or $\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$, d'où :

$$V = \frac{\sigma_0 R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma_0 R}{4\varepsilon_0}$$

EXE 19

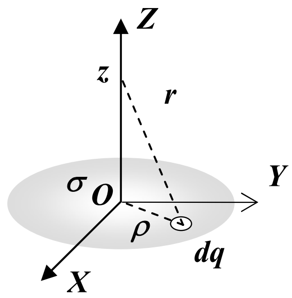
1- le potentiel au point M est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{r}$$

dS étant la surface élémentaire contenant ***dq***. On peut l'exprimer en coordonnées cylindriques : $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

d'où : $V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho\, d\rho\, \varphi}{r}$

Sous l'intégrale il ya trois variables qu'il faut convertir en deux variables seulement car nous avons une intégrale double. On prend alors la relation $r^2 = \rho^2 + z^2$.



$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\partial\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\partial\rho}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right)2\pi$$

Soit : $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right)$ avec $z > 0$.

2- $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$ donne $E = -\frac{dV}{dz}$ car point M le vecteur champ $\vec{E}$ est porté par OZ.

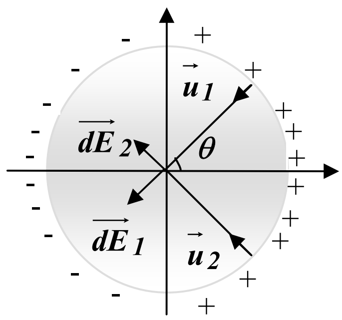
Tout calcul fait, nous aurons donc :

d'où $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]\vec{k}$ sachant que $z > 0$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{k} \text{ avec } z > 0$$

EXE 20

Remarquons d'abord que les charges sont concentrées autour de $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et qu'il y a absence de charge à $\theta = \pm\ \pi/2$. On peut chercher le champ et le potentiel en un point quelconque de l'axe OZ et les appliquer au centre. En plus le cosinus est positif quand $0 < \theta < \pi/2$ et il est négatif quand $\pi/2 < \theta < \pi$



$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_1 + \overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} - \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\left(-2\cos\theta\,\vec{i}\right) = \frac{-2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{R^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

=> $\vec{E}$ est porté par OX et il est opposé à $\vec{i}$

$dl = Rd\theta$, la seule variable dans cette expression est θ.

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\, d\theta\,\vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\frac{1 + \cos 2\theta}{2}d\theta\,\vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\frac{2\theta + \sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\frac{\pi}{2}\vec{i} \qquad \text{Soit} \qquad \vec{E} = \frac{-\lambda_0}{4\varepsilon_0}\frac{1}{R}\,\vec{i}$$

En M le potentiel crée par une charge élémentaire $dq = \lambda\, dl$ est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0 \cos\theta\, R\, d\theta}{R^2} \quad \text{soit} \quad V = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = 0$$

En O, le potentiel des charges plus compense celui des charges négatives de sorte que le potentiel total soit nul.

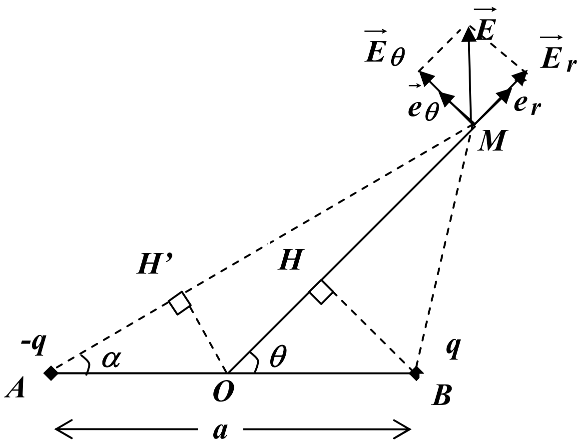
N.B : *Oon ne peut pas utiliser ici la relation* $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

EXE 21

1-

$r = OM = OH + HM$
$r_1 = AM = AH' + H'M$
$r_2 = BM$

$r >> a \Rightarrow \theta \approx \alpha$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = AH' + H'M \approx \frac{a}{2}\cos\alpha + r \quad \text{et} \quad r = OH + HM \approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_2$$

On en déduit : $r_1 - r_2 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2$

Soit : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$

2- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin\theta}{r^3}$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\sqrt{4a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

L'orientation du champ peu être définie par l'angle φ que fait E avec OM : $tg\varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tg\theta$

2- a- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de E_0.

$V'(M) = V(M) + V_0$.

$\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$ et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donnent : $V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$

A l'origine $V_0(O) = 0$ => $Cte = 0$, d'où $V_0 = - E_0 x$. avec $x = r\cos\theta$.

$$V_{Total}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta$$

b- $V_{Total} = 0$ => $\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta = 0$

=> $\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right) = 0$ et dans ce cas $r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{E_0}}$, ce qui définit une sphère de rayon r et de centre O comme surface équipotentielle.

Ou $\cos\theta = 0$ => $\theta = \pi/2$, ce qui définit le plan médiateur OY comme surface équipotentielle.

c- Le champ est la résultante entre le champ du dipôle et le champ extérieur E_0.

$\vec{E}_{Total} = \vec{E} + \vec{E}_0$. En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta = E_r\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) + E_\theta\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right)$$

En ajoutant $\vec{E}_0$ et en réarrangeant l'équation, on trouve :

$$\vec{E}_{Total} = \left(E_r\cos\theta - E_\theta\sin\theta + E_0\right)\vec{i} + \left(E_r\sin\theta + E_\theta\cos\theta\right)\vec{j}$$

On doit déterminer le champ en fonction de θ, c'est-à-dire que l'on doit prendre l'équipotentielle sphérique. On remplace alors r par son expression $\sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{E_0}}$ dans E_r et E_θ.

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^3} = 2E_0\cos\theta \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin\theta}{r^3} = E_0\sin\theta$$

Tout calcul fait, on trouve :

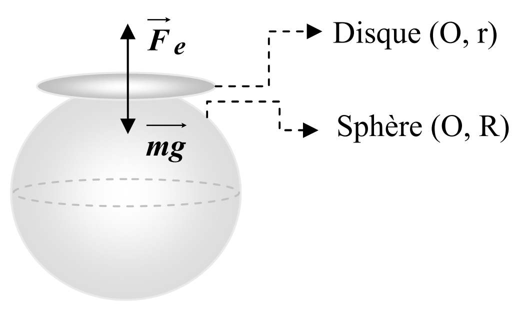
$$\vec{E}_{Total} = 3E_0\left(\cos^2\theta\ \vec{i} + \cos\theta\sin\theta\vec{j}\right)$$

IV- Conducteurs électrostatiques

EXE 22

La pression électrostatique sur la surface du conducteur sphérique est $P = \sigma^2/2\varepsilon_0$. Au contact, le disque et la sphère constitue un conducteur unique. Le disque est soumis alors à la même pression P.

D'autre part avant que le disque ne se soulève, il était à l'équilibre : $\vec{F}_e + \overrightarrow{mg} = \vec{0}$ (on néglige les forces de réaction).



Soit $F_e = mg \Rightarrow P\, S_{disque} = mg \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi r^2 = mg$

Le potentiel de l'ensemble est celui de la sphère conductrice : $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$.

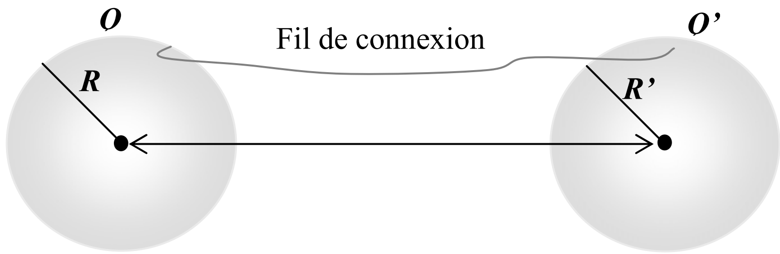
On remplace la charge par son expression en fonction de la densité : $V = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$.

La densité de charge du disque est la même que celle de la sphère : $\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{R}$

Soit donc : $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi r^2 = mg \Rightarrow \frac{\left(\frac{\varepsilon_0 V}{R}\right)^2}{2\varepsilon_0}\pi r^2 = mg \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 V^2}{2R^2}\pi r^2 = mg$

Soit $V = \frac{R}{r}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}$. Quand le potentiel du de l'ensemble disque plus sphère devient supérieur à cette valeur limite le disque se soulèvera.

EXE 23



1- Le potentiel de chaque conducteur n'est du qu'à l'influence de ses propres charges, d'où : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ et $V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'}$

Or $V = V'$ car les deux conducteurs sont reliés par un fil. Nous avons donc : $\frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$

On en déduit : $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{R'}{R}$

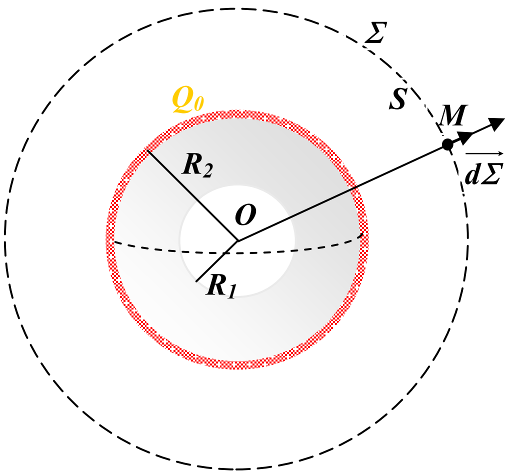
2- L'égalité en fonction des charges montre que si ***R'>>R*** alors ***Q'>>Q***. Ce cas on le rencontre qu'on on relie un conducteur à la terre. Son rayon est tellement petit devant celui de la terre que les charges qu'il peut contenir seront très faibles. Tout conducteur relié au sol verra ses charges disparaître.

- L'égalité en fonction des densités montre que si ***R'>>R*** alors $\sigma >> \sigma'$. Les charges se regroupent préférentiellement sur les surfaces à faible rayon de courbure. C'est l'effet des pointes. Ce phénomène est utilisé pour éliminer les charges des conducteurs que l'on ne peut pas reliés au sol tels que les avions par exemple. Les ailes contiennent des pointes ayant un petit rayon des

courbures. Les charges s'accumulent à ces endroits et attirent un grand nombre d'ions (provenant de l'air) de signes opposés et se trouvent ainsi neutralisées.

EXE 24

1- La charge initiale sur S est Q_0. S est conducteur, la charge est donc répartie sur sa surface externe. Il s'agit d'une distribution superficielle.



a- Le système est à symétrie sphérique, le champ en tout point de l'espace est radial.

b- Le champ ne dépend que de $r = OM$. L'ensemble des points M tel que OM reste constante est une sphère Σ de centre O et de rayon r. Appliquons le théorème de Gauss sur Σ: $\vec{E}$

$$\iint_{\Sigma} \vec{E}\,\overrightarrow{d\Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S} \sigma\, dS \;.\; \vec{E} \,//\, \overrightarrow{d\Sigma}$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} E\, d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S} \sigma\, dS \;.\; E \text{ et } \sigma \text{ sont uniformes}$$

S est la surface chargée contenue dans Σ.

► Si $r > R_2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} 4\pi R_2^2$

$$\Rightarrow E_{r>R_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_2^2}{r^2}$$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow V = \int E\, dr = -\frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$. La constante d'intégration est nulle puisque le potentiel à l'infini est nul.

► Si $R_1 < r < R_2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow E_{R_1<r<R_2} = 0$

$\Rightarrow V = C$. Continuité du potentiel $\Rightarrow V = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$

► Si $r < R_1 \Rightarrow E4\pi r^2 = 0$
$\Rightarrow E_{r<R_1} = 0$

=> A cause de la continuité du potentiel, V reste égale à $\frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$. Tout le système est équipotentiel.

Même dans le creux le potentiel reste constant et égale à $\frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}$

En fonction de Q_0 et puisque $\sigma = \frac{Q_0}{4\pi R_2^2}$, V devient :

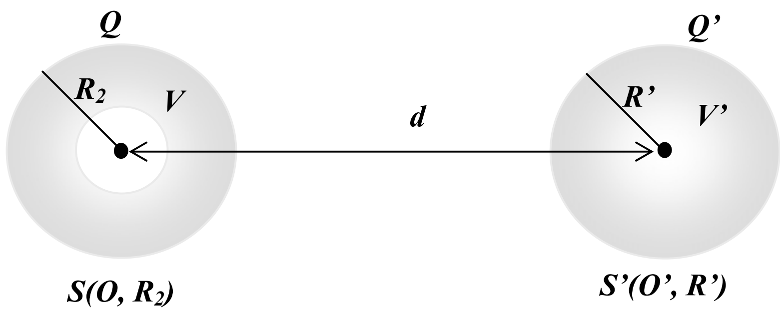
$V_{r>R_2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\frac{1}{r}$ et $V_{r<R_2} = \frac{Q_O}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$

c- S est un conducteur, sa charge est Q_0 et son potentiel V est constant et il est égale à $V_{r<R_2}$.

Puisque $Q_0 = C\,V$, on en déduit : $C = 4\pi\varepsilon_0 R_2$

A. N : $V = 70\ kV$, $C = 40\ PF$.

2-



a- Calculons les potentiels de chaque conducteur :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{d}$$

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'}$$

On déduit de ce système les expressions de Q et Q' :

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{d\,R_2}{d^2 - R'R_2}\left(Vd - V'R'\right)$$

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{d\,R'}{d^2 - R'R_2}\left(V'd - VR_2\right)$$

On remplace R' par $R_2/2$ et d par $2R_2$:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{2R_2}{7}\left(4V - V'\right)$$

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{2R_2}{7}\left(2V'-V\right)$$

b- Les équations d'influence s'écrivent sous la forme :

$$Q = C_{11}V + C_{12}V'$$

$$Q' = C_{21}V + C_{22}V'$$

En comparant ce système avec le système précédent on en déduit :

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{8R_2}{7},\ C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0 \frac{2R_2}{7} \text{ et } C_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{4R_2}{7}$$

C_{11} est la capacité de ***S*** en présence de ***S'***, C_{22} est la capacité de ***S'*** en présence de ***S***.
C_{12} et C_{21} sont les coefficients d'influence mutuelle entre ***S*** et ***S'***.

c- Quand le conducteur ***S*** est seul, la capacité trouvée est $C = 4\pi\varepsilon_0 R_2$ (§ **1b**). Après l'approche de S', la capacité est devenue $C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{8R_2}{7} > C = 4\pi\varepsilon_0 R_2$.

On conclu que la capacité d'un conducteur influencé augmente.

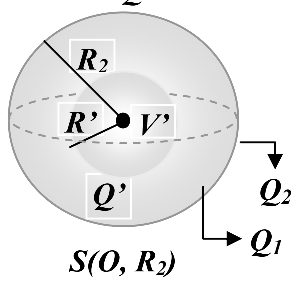
d- A.N. : $Q = 1{,}6\ \mu C$, $Q' = 2{,}4 \mu C$

$$C_{11} = \frac{320}{7} = 45{,}71\ PF,\ C_{12} = C_{21} = -\frac{80}{7} = -11{,}43\ PF \text{ et } C_{22} = \frac{160}{7} = 22{,}86\ PF$$

Remarque

*On a maintenu après influence la valeur du potentiel **V de S**, la charge de **S** qui était $Q_0 = 2{,}8\ \mu C$ est devenue $Q = 1{,}6\ \mu C$.*

3- Nous avons maintenant un système à influence totale ; ***S*** entoure complètement ***S'***. Les charges vont apparaître aussi sur la face interne de S



a- $$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R_2} \qquad (1)$$

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'} \qquad (2)$$

$2R' = R_2$ et **(2)** $\Rightarrow V = V' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R_2}$ que l'on reporte dans

(1) $\Rightarrow Q = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V' - 2Q'$

A. N. : $V = 80\ kV$ et $Q = 0{,}8 \mu C$.

b- A l'état initial ***S*** porte la charge Q_0. Après influence avec ***S'*** qui porte ***Q'***, la charge $-Q'$ va apparaître sur la face interne de ***S*** et donc sur la face externe apparaitra la charge ***Q'*** qui va s'ajouter à la charge initiale Q_0. Nous aurons :

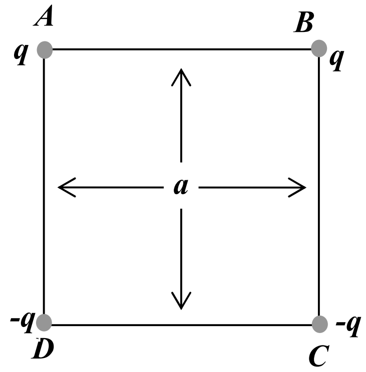
Face interne $Q_1 = -Q'$

Face externe $Q_2 = Q' + Q_0$

Au total ***S*** porte la charge $Q = Q_1 + Q_2 = Q_0$.

On en déduit : La charge totale de ***S*** est restée inchangée même après influence. C'est le principe de conservation de la charge.

EXE 25



$$W = \frac{1}{2}(qV_A + qV_B - qV_C - qV_D) = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$ car :

$$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$: C'est le potentiel en ***A*** du aux charges de ***B***, ***C*** et ***D***.

$$V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$: C'est le potentiel en ***B*** du aux charges de ***C***, ***D*** et ***A***.

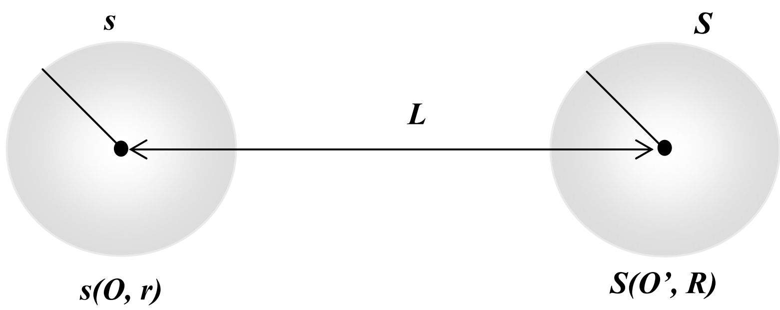
$$V_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$: C'est le potentiel en ***C*** du aux charges de ***D***, ***A*** et ***B***.

$$V_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$: C'est le potentiel en ***D*** du aux charges de ***A***, ***B*** et ***C***.

L'énergie du système est négative. Le système cède de l'énergie au milieu extérieur. En effet si l'on étudie les forces électriques qui agissent sur chaque charge, on s'aperçoit que la résultante ne peut pas s'annuler. Le système est dans un état instable et il doit céder de l'énergie (les charges doivent se repositionner) pour se stabiliser.

EXE 27

1)



$$v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

On déduit de ce système les expressions de ***q*** et ***Q*** :

$$q = r\left(4\pi\varepsilon_0 v - \frac{Q}{L}\right)$$

$$V = \frac{r\,v}{L} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{r}{L^2}\right)$$

Remarque

*Pour maintenir **s** à un potentiel constant **v**, on doit l'alimenter en quantité de charges. En effet on*

*voit dans l'expression de **q** que celle-ci dépend de **L**. Si **L** change, **q** doit aussi subir une modification pour que **v** reste le même.*

*A titre d'exemple : Quand **S** est à L_0 de **s**,* $q = r\left(4\pi\varepsilon_0 v - \frac{Q}{L_0}\right)$

*Quand **S** est à ∞ de **s**,* $q = r\,4\pi\varepsilon_0 v$

*On en déduit que **s** à reçu au cours de la variation de **L** (de L_0 à l'infini) une charge supplémentaire Δq égale à* $\frac{rQ}{L_0}$*. Soit un apport d'énergie supplémentaire ΔE_{Sup} égale à $v\Delta q$.*

2) Les deux sphères sont équivalentes à leurs charges placées à leurs centres. Chaque conducteur exerce sur l'autre une force électrique, d'intensité F_e, donnée par la loi de Coulomb :

$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{L^2}$. Si l'on remplace q par son expression nous aurons : $F_e = \frac{rQ}{L^2}\left(v - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\right)$

3) Si q et Q sont de même signe, la force sera répulsive et son travail pour un déplacement dL sera donné par $dW_e = -F_e\,dL$. Pour un déplacement de L_0 jusqu'à l'infini, nous aurons :

$$W_e = -\int_{L_0}^{+\infty} F_e dL = -\frac{rQv}{L_0} + \frac{rQ^2}{4\pi\varepsilon_0 2L_0^2}$$

4) L'énergie électrostatique du système est $W = \frac{1}{2}(qv + QV)$. On remplace q et V par leurs expressions on trouve :

A $L = L_0$, $W_i = \frac{1}{2}\left[4\pi\varepsilon_0 r v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{r}{L_0^2}\right)\right]$

A $L = \infty$: $W_f = \frac{1}{2}\left[4\pi\varepsilon_0 r v^2 + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right]$

5) Le gain en énergie ΔE du système au cours du déplacement est :

$$\Delta E = \frac{rQ^2}{8\pi\varepsilon_0 L_0^2}$$

A ce gain d'énergie il faut ajouter l'énergie ΔE_{sup} vue précédemment.
Le gain réel d'énergie est donc : $\Delta E + \Delta E_{sup}$

6) On remarque que $E_e = -\frac{rQv}{L_0} + \Delta E = -\Delta E_{sup} + \Delta E$

Que l'on peut écrire sous la forme $W_e + \Delta W - \Delta W_{sup} = 0$ et ainsi la conservation de l'énergie est bien vérifiée tout au long du déplacement de ***S***.

EXE 28

Nous allons calculer d'abord le champ et le potentiel créés par un cylindre infini quand le Point M est situé entre les armatures.

Symétrie cylindrique, ***S*** = surface de Gauss de hauteur ***h*** et de rayon **r**. Le champ est

perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Théorème de Gauss : $E\,2\pi\,r\,h = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} 2\pi\,R_1\,h \Rightarrow E = \dfrac{\sigma\,R_1}{\varepsilon_0 r}$

$$\int_{V_1}^{V_2} -V = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{\sigma\,R_1}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma\,R_1}{\varepsilon_0}\left(ln\,R_2 - ln\,R_1\right) = \frac{\sigma\,R_1}{\varepsilon_0}ln\frac{R_2}{R_1}$$

La charge de l'armature interne de longueur fini ***h*** est $Q = \sigma\,2\,\pi\,R_1\,h$. Le potentiel devient :

$V_1 - V_2 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} ln\dfrac{R_2}{R_1}$. On en déduit :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\,h}{ln\dfrac{R_2}{R_1}}.$$

Si $e = R_2 - R_1 << R_1$. $ln\dfrac{R_2}{R_1} = ln\dfrac{R_1 + e}{R_1} = ln\left(1 + \dfrac{e}{R_1}\right) \approx \dfrac{e}{R_1}$

D'où $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\,hR_1}{e} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$. ***S*** étant la surface de l'armature interne

EXE 29



La capacité d'un condensateur plan est $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$

Quand on introduit la lame d'épaisseur ***d***, on se trouve avec deux condensateurs en série de capacité C_1 et C_2. La capacité équivalente est donnée par $\dfrac{1}{C_{équ}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ avec $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e_1}$ et

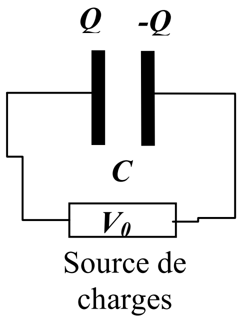
$C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e_2}$

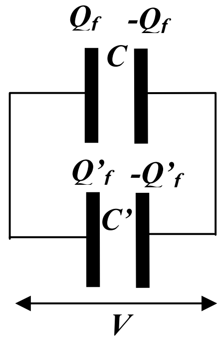
$\Rightarrow \dfrac{1}{C_{equ}} = \dfrac{e_1}{\varepsilon_0 S} + \dfrac{e_2}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{e_1 + e2}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{e - d}{\varepsilon_0 S} = \dfrac{1}{C} - \dfrac{d}{\varepsilon_0 S}$

Soit $C_{equ} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{\varepsilon_0 S - d} C$

La capacité du condensateur à augmenté. Plus la lame est épaisse plus la capacité obtenue est grande.
Ce moyen d'ajout d'une lame entre les armatures est très utilisé pour usiner des condensateurs ayant les mêmes dimensions mais des capacités différentes.

EXE 30





Initialement $Q = C V_0$.

En reliant C à C' les deux condensateurs seront forcément en parallèle : $V = Q_f/C = Q'_f/ C'$.

Ils partageront donc la charge initiale : $Q = Q_f + Q'_f \Rightarrow C V_0 = (C + C') V$

On en déduit l'expression de : $V = \dfrac{C}{C + C'} V_0$

Les charges seront alors : $Q_f = CV = \dfrac{C^2}{C + C'} V_0$; $Q'_f = C'V = \dfrac{C\,C'}{C + C'} V_0$

Electrocinétique

EXE 1

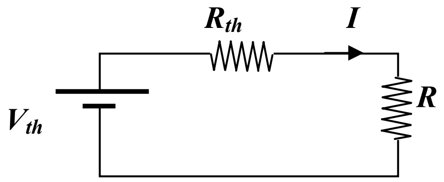
1- On transforme le triangle du milieu en étoile et on remplace les résistances en série par leur équivalent. Le circuit devient :

On débranchant ***R***, nous aurons

$$R_{th} = 6R \,//\, 4R = \frac{24}{10} R$$

$$V_{th} = E_1 - 4RI_0 = E_2 + 6RI_0$$

I_0 est le courant sortant de la borne (+) de E_1 quand R est déconnectée. $I_0 = \dfrac{E_1 - E_2}{10R}$ que l'on remplace dans l'une des expressions de V_{th}. On trouve : $V_{th} = (6\,E_1 + 4\,E_2)/10$. Le générateur de thévenin connecté à ***R*** est :



$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{3E_1 + 2E_2}{17R}$$

2- A l'aide des lois de Kirchhoff

Loi aux nœuds : $E_1 = 4R\,I_1 + RI$. $\Rightarrow$ $I_1 = \dfrac{E_1 - RI}{4R}$

$-E_2 = -\,6R\,I_2 - RI$. $\Rightarrow$ $I_2 = \dfrac{E_2 - RI}{6R}$

Loi aux mailles : $I = I_1 + I_2$. $\Rightarrow$ $I = \dfrac{(3E_1 + 2E_2)}{17R}$

3- A.N : $R = 1\ M\Omega$, $E_1 = 2/3\ V$ et $E_2 = 15/2$.

$I = 1\ \mu A$.

On remarque que

Entre B et C, il y a deux résistance en // qu'il faut ajouter à R' pour obtenir la résistance équivalente entre B et H.

Entre B et K, il y a deux générateurs en séries et deux résistances en série aussi.

Entre C et F, il y a un générateur et un récepteur en série et deus résistances en série aussi.

Tout calcul fait, on retrouve le même circuit que celui de la question précédente et donc on aura le même courant.

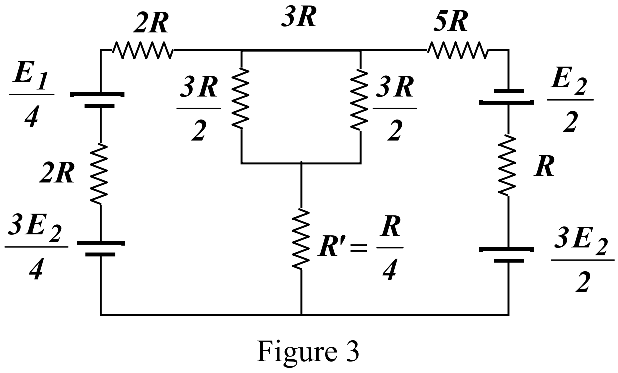


Figure 3

EXE 2

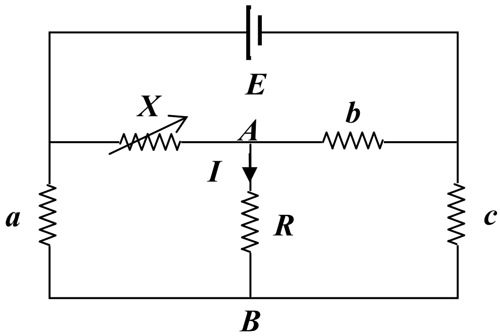


Figure 4

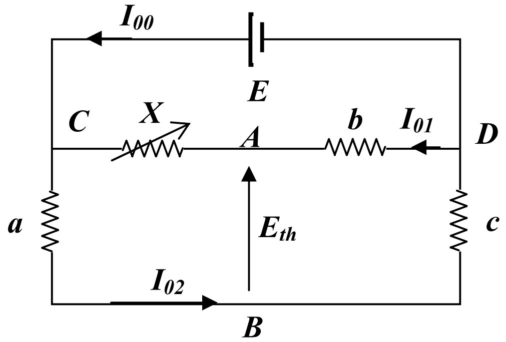


Figure 4 avec ***R*** déconnectée

1- On suppose d'abord que ***I*** se dirige de ***A*** vers ***B***. On déconnecte la branche contenant le courant ***I*** à calculer. E_{th} est alors la d.d.p. entre ***A*** et ***B*** : $E_{th} = V_A - V_B$. Soit I_{00}, I_{01} et I_{02} les courants de ce circuit intermédiaire qui ne constitue qu'une étape de calcul.

⇨ $E_{th} = - b\, I_{01} - c\, I_{02} = X\, I_{01} + a\, I_{02}$.

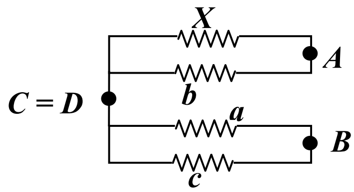
⇨ $-(a + c)\, I_{02} = (X + b)\, I_{01}$.

Cette dernière équation est aussi égale à ***E*** d'après les mailles contenant ce générateur. Ceci nous conduit à :

$$I_{01} = \frac{E}{X+b} \qquad et \qquad I_{02} = \frac{-E}{a+c}$$

Et donc $E_{th} = \dfrac{XE}{X+b} - \dfrac{aE}{a+c}$

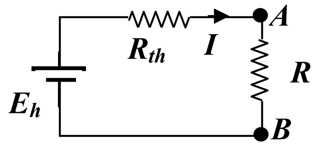
La résistance équivalente de Thévenin R_{th} se calcule en court-circuitant ***E***. Dans ce cas ***C*** et ***D*** constituent électriquement un seul point. Le circuit devient :



On s'aperçoit facilement que $R_{th} = (X//b) + (a//c)$.

Soit : $R_{th} = \dfrac{Xb}{X+b} + \dfrac{ac}{a+c}$

Il reste maintenant à remplacer tout le circuit par le générateur de Thévenin et reconnecter ***R*** :



Selon la loi simple de Pouillet, nous avons $E_{th} = (R_{th} + R)\, I$. En remplaçant R_{th} et E_{th} par leurs expressions, on en déduit la valeur de ***I*** :

$$I = \frac{X(a+c) - a(X+b)}{Xb(a+c) - ac(X+b) + R(X+b)(a+c)} E$$

2-a- ***I*** nul. C'est la condition d'équilibre du pont

$$X = \frac{ab}{c}$$

b- ***I*** soit dirigé de ***A*** vers ***B***. C'est-à-dire **I** positif : $X \succ \dfrac{ab}{c}$

c- ***I*** soit dirigé de ***B*** vers ***A***. C'est-à-dire ***I*** négatif : $X \prec \frac{ab}{c}$

EXE 3

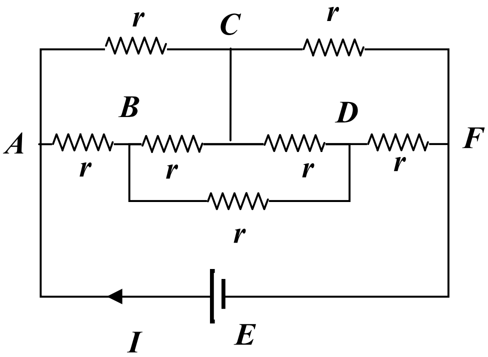
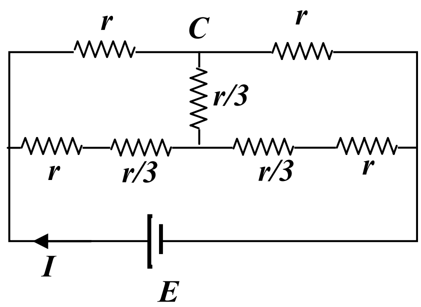
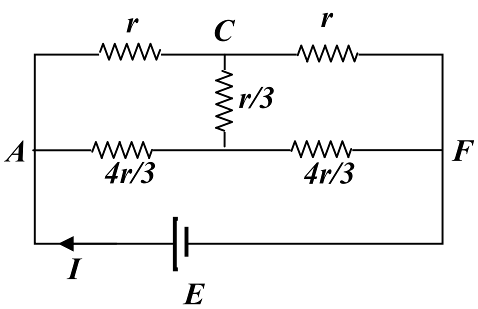


Figure 5

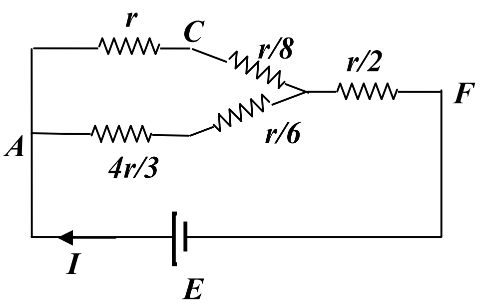
1- La méthode la plus simple et la plus rapide consiste à transformer le circuit.
La portion BCD est un triangle que l'on peut transformer en étoile. Le circuit devient :

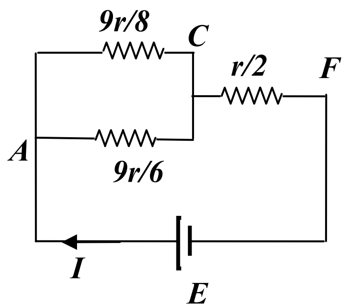


Equivalent à :

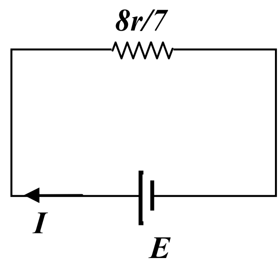


On doit maintenant appliquer la transformation de Kenelly soit du coté ***AC*** soit du coté ***CF*** et on fait la somme des résistances qui sont en série :
:





Ce qui est équivalent au circuit simple ci-contre :

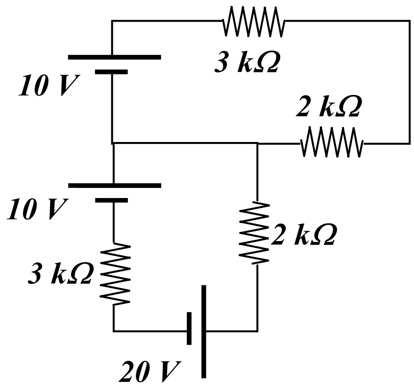


La loi de Pouillet nous permet alors d'écrire : $\boldsymbol{E = \frac{8r}{7} I}$. Soit $\boldsymbol{I = \frac{7}{8r} E}$

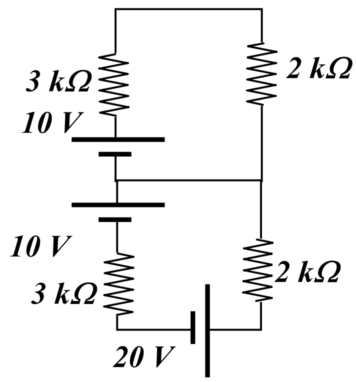
2- A. N. : ***I = 1 mA.***

EXE 4

Si le courant de la résistance de ***8 kΩ*** est nul, on peut substituer cette branche par une résistance infinie. Le circuit devient :

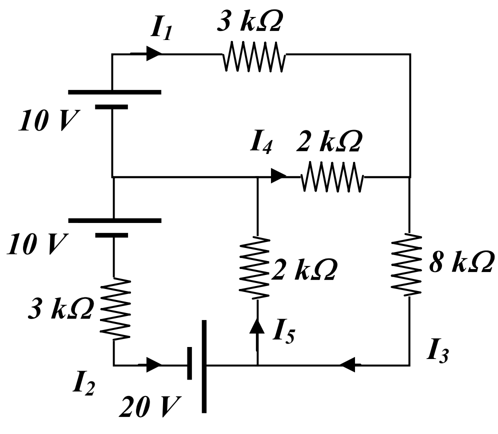


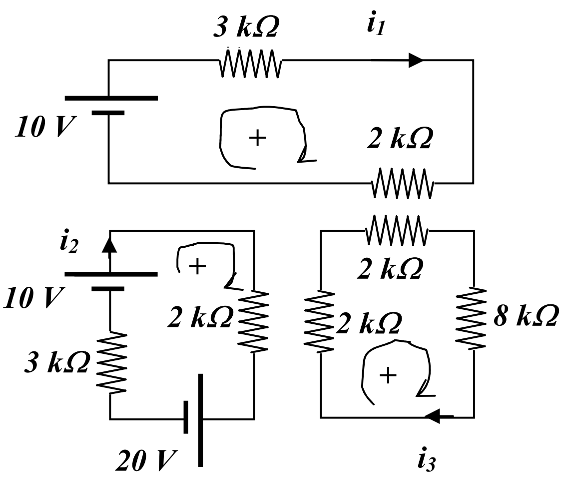
Equivalent à



Ce dernier circuit est symétrique, les courants des branches contenant les générateurs sont identiques. Pour une maille, nous avons : $\boldsymbol{10 = 5.10^3 I}$. Soit ***I* = *2 mA***. A part le court circuit, toutes les branches sont parcourues par un courant égale à ***2 mA***.

<u>Mailles</u> <u>Indépendantes</u>





Il y a cinq courants réels inconnus. A l'aide des mailles indépendantes, on n'a que trois inconnues.

On écrit la loi de Pouillet corrigée pour toutes les mailles :

$\boldsymbol{10 = 5.10^3\, i_1 - 2.10^3\, i_3}$ => $\boldsymbol{10^{-2} = 5i_1 - 2i_3}$

$\boldsymbol{10 - 20 = 5.10^3\, i_2 - 2.10^3\, i_3}$ => $\boldsymbol{10^{-2} = 2i_3 - 5i_2}$

$\boldsymbol{0 = 12.10^3\, i_3 - 2.10^3\, i_2 - 2.10^3\, i_1}$ => $\boldsymbol{6\, i_3 = i_2 + i_1}$

Les deux premières équations donnent $\boldsymbol{4\, i_3/5 = i_2 + i_1}$ avec la troisième on en déduit que $\boldsymbol{i_3 = 0}$. Dans ce cas $\boldsymbol{i_1 = -\, i_2 = 0{,}2\ A}$.

On comparant les branches du circuit initial et du circuit éclaté, on en déduit :

$\boldsymbol{I_1 = i_1 = 0{,}2\ A}$

$\boldsymbol{I_2 = -i_2 = 0{,}2\ A}$

$\boldsymbol{I_3 = i_3 = 0\ A}$. On retrouve le résultat de la question 1.

$\boldsymbol{I_4 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A}$

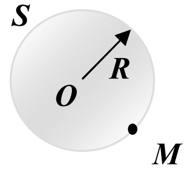
$\boldsymbol{I_5 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A}$

Excepté la résistance de $\boldsymbol{8\ k\Omega}$, le même courant parcourt toutes les branches.

Problèmes de révision

Pro1

Une sphère conductrice $\boldsymbol{S}$ de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$, contient une distribution de charges uniforme qui crée donc en tout point de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}$.



1- Donner et expliquer la nature de la distribution de charges.

2- Quelle est la valeur du champ à l'intérieur de $\boldsymbol{S}$. Justifier votre réponse.

3- Calculer le champ à l'extérieur de **S** tout en restant au voisinage de la surface de celle-ci.

4- Schématiser les lignes de champ au voisinage de $\boldsymbol{S}$. Justifier votre réponse.

5- En déduire le module $\boldsymbol{E}$ du champ en un point $\boldsymbol{M}$ de la surface de $\boldsymbol{S}$.

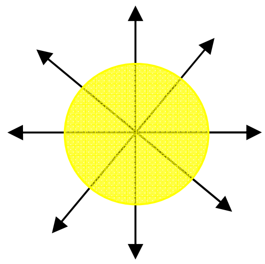
6- Calculer le module $\boldsymbol{df}$ de la force électrostatique $\vec{df}$ exercée par les autres charges de la sphère sur une charge ponctuelle $\boldsymbol{dq}$ placée en $\boldsymbol{M}$.

7- En déduire la pression électrostatique $\boldsymbol{P}$ exercée sur $\boldsymbol{dq}$.

Solution
Pro1

1- La distribution est surfacique σ car S est un conducteur.
2- Et donc, selon le théorème de Gauss, en tout point à l'intérieur de S le champ sera nul
3- On applique le théorème de Coulomb. Le champ au voisinage de S est

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Ligne de champ

4- S est un conducteur. Tout conducteur est équipotentiel. La surface de S est une surface de niveau. Les lignes de champ sont donc perpendiculaires à S.
5- Dans S $E= 0$

Au voisinage de S du coté extérieur $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

En M, on prend la moyenne $E(M) = \frac{E_{int} + E_{ext}}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

6- Calculer le module $df = dq\ E = s\ dS\ E$. En remplaçant E par son expression $df = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS$.

7- De la question précédente on déduit : $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

Prob2

Une sphère conductrice S, de rayon intérieur R et de centre O, est placée dans le vide. M désigne un point quelconque de l'espace tel que $OM = r$. L'origine des potentiels est prise à l'infini.

1- S porte une charge Q_0. Donner, sans faire de calcul, le potentiel $V(r)$ créé par Q_0 quand $r < R$ et $r = R' > R$. Justifier votre réponse.
2- On place S dans une deuxième sphère S', de rayon R', de sorte que les deux sphères soient concentriques.
Initialement S' porte la charge Q'_0. Après influence, sa charge devient $Q' = Q_1 + Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont respectivement les charges portées par les faces interne et externe de S'.
a- Déterminer Q'.
b- Calculer, en fonction de R' et Q_2, le potentiel V' de S'.
c- En déduire, en fonction de R, R' et Q_0, l'expression de la différence de potentiel $V–V'$.
d- Montrer que si l'on relie S' à la masse, le nouveau potentiel de S (noté V_n) prend la valeur $V–V'$.
e- En déduire la capacité C du condensateur ainsi formé.

Solution
Prob2

1- Une sphère portant une charge en surface est équivalente à sa charge concentrée à son origine.
Donc quand $r = R' > R$, le potentiel est $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r}$
Quand $r < R$, la sphère étant conductrice, son potentiel est constant. D'après la continuité du

potentiel nous aurons $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R}$

2- On place ***S*** dans une deuxième sphère ***S'***, de rayon ***R'***, de sorte que les deux sphères soient concentriques.
Initialement ***S'*** porte la charge Q'_0. Après influence, sa charge devient $Q' = Q_1 + Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont respectivement les charges portées par les faces interne et externe de ***S'***.

a- $Q' = Q_1 + Q_2$ avec $Q_1 = -Q_0$ *et* $Q_2 = Q_0 + Q'_0$.
Soit $Q' = -Q_0 + Q_0 + Q'_0 = Q'_0$.
Résultat prévu puisque la charge totale de ***S'*** doit rester la même selon le principe de la conservation de la charge.
b- ***V'*** est du à la présence de la charge Q'_0 et de la charge ***Q'***. On peut donc écrire :

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R'} \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R'}$$

c-

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0+Q_2}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) + V' \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V - V' = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$$

d- S' est à la masse, son potentiel et sa charge externe deviennent nuls. Sa charge totale est celle de la face interne c'est-à-dire $-Q_0$.

$$\left.\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_0}{R'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{R} \\ &= \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) \end{aligned}\right\} \quad d'où \quad V_n = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right) = V - V'$$

e- Sachant que la capacité d'un condensateur à influence totale est $C = \frac{Q_0}{V - V'}$, on en déduit que $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{RR'}{R+R'}$

<u>Remarque</u> : *On peut calculer **C** avant de relier **S'** à la masse, le résultat reste le même ; ceci*

montre que la capacité est indépendante de la charge et du potentiel et ne dépend que de la géométrie et des dimensions du condensateur.

Pro3

Considérons le réseau de la figure 1 où ***G*** est un générateur de ***6 Volts*** et R_1, R_2 et R_3 sont des résistances égales respectivement à $12\ \Omega$, $6\ \Omega$ et $12\ \Omega$.

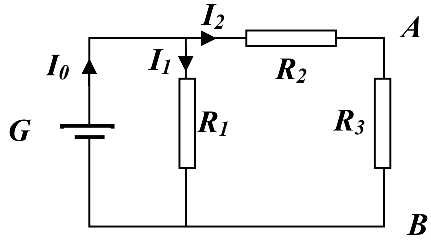


Figure 1

1- **a.** Combien le réseau comporte-t-il de nœuds et de branche ?
   b. Combien d'équations indépendantes pouvons-nous obtenir à l'aide des lois de Kirchhoff ?
   c. Etablir ces équations et résoudre le système obtenu.
2- En utilisant la méthode des mailles indépendantes, retrouver ces courants. En déduire la valeur de la d.d.p. $V_A - V_B$.
3- A l'aide des résultats précédents, trouver la valeur $V_A - V_B$ de la tension entre les bornes ***A*** et ***B*** du circuit de la figure 2.

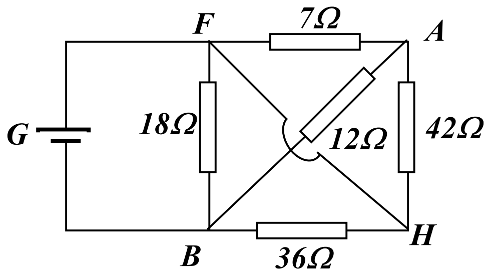


Figure 2

Solution
Pro3

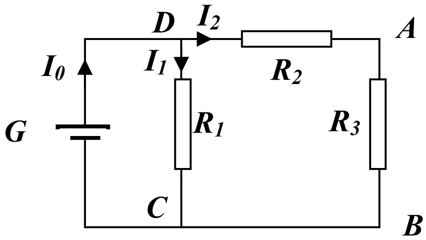


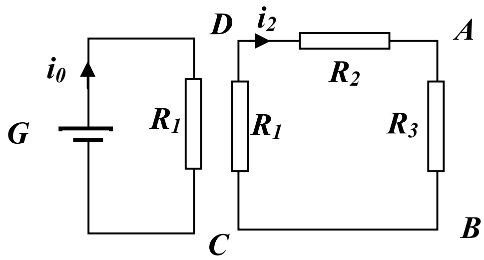
Figure 1

1- **a.** Le circuit contient $n = 2$ nœuds ; ***C*** et ***D***. Il contient aussi $b = 3$ branches : ***DABC***, ***DC*** en passant par R_1 et ***DC*** en passant par **G**.
b. Loi aux nœuds : $n - 1 = 1$ équation
Loi aux mailles : $b - (n - 1) = 3 – 1 = 2$ équations indépendantes.
c. $I_0 = I_1 + I_2$
$G = (R_2 + R_3)\, I_2$
$G = R_1 I_1$

Ce qui donne : $I_1 = \dfrac{G}{R_1} = 0{,}50\ A$; $I_2 = \dfrac{G}{R_1 + R_2} = 0{,}33\ A$;

$$I_0 = \frac{(2R_1 + R_2)G}{R_1(R_1 + R_2)} = 0{,}83\ A$$

2- Le circuit comporte deux mailles indépendantes. On choisi comme sens positif celui des aiguilles d'une montre. i_0 et i_2 sont les courants fictifs de chaque maille. On applique pour chaque maille la loi de Pouillet modifiée.



$G = R_1 i_0 – R_1 i_2$
$0 = (R_1 + R_2 + R_3)\, i_2 – R_1 i_0$
On en déduit facilement que :
$i_0 = \dfrac{(R_1 + R_2 + R_3)G}{(R_2 + R_3)R_1}$ et $i_2 = \dfrac{G}{R_2 + R_3}$

A. N. : $i_0 = \dfrac{5}{6} = 0{,}83A$; $i_2 = \dfrac{1}{3} = 0{,}33A$

En comparant le circuit réel à la représentation des mailles indépendantes, on a :
$I_0 = i_0 = 0{,}83\ A$; $I_2 = i_2 = 0{,}33\ A$; $I_1 = i_0 – i_2 = 0{,}50\ A$
$V_A – V_B = R_3 I_2 = 4\ V.$

3- Les bornes ***F*** et ***H*** du circuit de la figure 2 sont au même potentiel. On peut les réunir et dans ce cas il apparaît que les résistances **7 Ω** et **42 Ω** sont en parallèles de même que les résistances **18 Ω** et ***36 Ω***. Le circuit obtenu est identique à celui de la figure 1 et $V_A – V_B = 4\ V.$